

André Arruda Daier

ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE DIFERENCIAÇÃO DE PREÇOS EM COMPANHIAS AÉREAS ATRAVÉS DE MODELOS BASEADOS EM AGENTES

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do diploma
de Engenheiro de Produção.

São Paulo

2012

André Arruda Daier

ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE DIFERENCIAÇÃO DE PREÇOS EM COMPANHIAS AÉREAS ATRAVÉS DE MODELOS BASEADOS EM AGENTES

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do diploma
de Engenheiro de Produção.

Orientadora:
Prof^a Dr^a Celma de Oliveira Ribeiro

São Paulo
2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Daier, André Arruda

Análise de estratégias de diferenciação de preços em companhias aéreas através de modelos baseados em agentes / A.A. Daier. -- São Paulo, 2012.

85 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Discriminação de preços 2.Transportes aéreo de passageiros 3.Modelos baseados em agentes I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à professora Celma de Oliveira Ribeiro pela orientação, dedicação e paciência, e também pelo alto nível de exigência, que me proporcionou grande aprendizado.

Também não poderia deixar de agradecer à Maria Paula Cicogna, que contribuiu de forma fundamental para o desenvolvimento do trabalho.

Deixo meus agradecimentos também a minha família e meus amigos, que certamente contribuíram, direta ou indiretamente, para todas as conquistas que já alcancei na vida.

Resumo

DAIER, A. A. (2012). **Análise de estratégias de diferenciação de preços em companhias aéreas através de modelos baseados em agentes**. 2012. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Propõe-se um modelo baseado em agentes para análise de discriminação de preços aplicada ao setor de transportes aéreos de passageiros, em um mercado monopolístico. Modelos baseados em agentes buscam estudar resultados globais observados em um sistema a partir do comportamento individual interativo e dinâmico de uma população de agentes que o compõe. Através dessa abordagem, é analisado o impacto gerado por diferentes estratégias empregadas por uma companhia aérea monopolista para discriminar os preços dos serviços ofertados em função das características dos potenciais consumidores. Conclui-se, de acordo com o previsto pela literatura, que a discriminação de preços contribui para o aumento do lucro da empresa, mas diminui o bem estar econômico do mercado; além disso, observou-se que a discriminação de preços por diferenciação de preços ao longo do tempo possui efeito menos expressivo do que a diferenciação de preços entre grupos de clientes em um mesmo instante de tempo. O modelo pode ser empregado para avaliar possíveis alternativas estratégicas de discriminação de preços, auxiliando no entendimento do mercado modelado. Ademais, o modelo pode ser estendido para aplicação em outros setores econômicos e pode ser evoluído para considerar concorrência e aprendizado pelas partes envolvidas.

Palavras-chave: Discriminação de preços. Modelo baseado em agentes. Transporte aéreo de passageiros.

Abstract

DAIER, A. A. (2012). **Analysis of price discrimination strategies in airline industry with agent-based models**. 2012. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

It is proposed an agent-based model for price discrimination analysis, which is applied in a theoretical monopolistic market of the commercial aviation industry. Agent-based models are used to study global emergent phenomena generated by the dynamic and interactive behavior of the population of individual heterogenic agents that compounds a system. The results of various strategies employed by an airline company to discriminate prices between its clients with distinct services offerings are studied. In line with the literature on the subject, it is concluded that the price discrimination contributes to the increase in profits, but reduces the economic welfare of the market, and advanced-purchase price discrimination was found to be less effective than others types of price discrimination. The model can be used to explore price discrimination strategy alternatives, aiding in the understanding of the market under study. It can be extended to be applied in other industries, or can be evolved in order to consider competitive markets and learning by all parties involved.

Keywords: X. Y. Z. Price discrimination. Agent-based model. Commercial aviation.

Lista de Figuras

Figura 1: Esquematização da estrutura do modelo	54
Figura 2: Diagrama do modelo	55

Lista de Tabelas

Tabela 1: Características dos clientes	65
Tabela 2: Características das passagens	65
Tabela 3: Quadro resumo dos resultados com as diferentes estratégias para o modelo 1	73
Tabela 4: Estratégia de definição de preços	80
Tabela 5: Quadro resumo dos resultados com as diferentes estratégias para o modelo 2	82

Lista de Gráficos

Gráfico 1: Exemplo ilustrativo da disposição a pagar	39
Gráfico 2: Distribuição de probabilidades da quantidade de clientes que aparecem em um intervalo de $\tau = 2$ horas, com $\lambda = 7,2$ clientes por hora	44
Gráfico 3: Densidade de probabilidades do tempo de espera entre chegadas de clientes, com $\lambda = 7,2$ clientes por hora	45
Gráfico 4: Resultado de simulações de Monte Carlo comparados com a distribuição precisa	47
Gráfico 5: Distribuição das probabilidades da chegada de clientes em uma semana, com taxa de chegada $\lambda = 10$ clientes/semana	59
Gráfico 6: Distribuição das probabilidades da chegada de clientes em doze semanas, com taxa de chegada $\lambda = 10$ clientes/semana	59
Gráfico 7: Simulação da chegada de clientes: cada ponto é um cliente que apareceu para possível compra de passagens para o voo	60
Gráfico 8: Simulação com chegada de clientes dos três tipos especificados, que são constantes ao longo do tempo, mas possuem valores diferentes	61
Gráfico 9: Curvas das taxas de chegada ao longo do tempo para os diferentes grupos de clientes	63
Gráfico 10: Simulação com chegada de clientes dos três tipos especificados, de acordo com as curvas mostradas no gráfico 9	63
Gráfico 11: Distribuição de probabilidades do lucro da companhia aérea com a estratégia 0	66
Gráfico 12: Distribuição de probabilidades do <i>payoff</i> total dos clientes, sob a estratégia 1	68
Gráfico 13: Distribuição de probabilidades do lucro, <i>payoff</i> e a soma de ambos para a estratégia 2	69
Gráfico 14: Distribuição de probabilidades do lucro, <i>payoff</i> e a soma de ambos para a estratégia 3	71
Gráfico 15: Distribuição de probabilidades do lucro, <i>payoff</i> e a soma de ambos para a estratégia 4	72
Gráfico 16: Resultados das estratégias propostas	73
Gráfico 17: Taxas de chegada e utilidades (constantes no tempo) dos 15 grupos de clientes	75
Gráfico 18: Quantidade de clientes que estão dispostos a pagar um determinado preço ou menos para a única passagem (curva de demanda)	76
Gráfico 19: Distribuição da receita para a estratégia 0	77
Gráfico 20: Receita média esperada em função do preço estabelecido	78

Gráfico 21: Distribuição de probabilidades da receita, do <i>payoff</i> total e do bem estar econômico para passagem com preço constante de R\$ 850,00	78
Gráfico 22: Estratégia de definição de preços e receita esperada	80
Gráfico 23: Receitas esperadas em função do preço inicial escolhido para as estratégias 1 e 2	80
Gráfico 24: Distribuições de probabilidades da receita total, do <i>payoff</i> total, e da soma de ambos, obtidas através de simulação	81

Sumário

1	Introdução.....	19
2	Conceitos.....	20
2.1	Formação de preços no mercado de transporte aéreo de passageiros	21
2.1.1	Fatores que influenciam a formação dos preços das passagens aéreas	21
2.1.2	Discriminação de preços.....	29
2.2	Modelos baseados em agentes	33
2.3	Teoria das escolhas e o bem estar econômico	36
2.3.1	Utilidade	37
2.3.2	Disposição a pagar.....	38
2.3.3	Medidas de bem estar econômico e o <i>payoff</i>	40
2.4	Teoria das filas de distribuição de probabilidades de Poisson.....	41
2.4.1	Chegada aleatória de indivíduos e distribuições de probabilidades associadas	42
2.4.2	Simulações de Monte Carlo.....	46
3	Modelo proposto	48
3.1	Descrição geral	48
3.2	Estruturação formal.....	51
3.2.1	Cenário preliminar 1	58
3.2.2	Cenário preliminar 2	60
3.2.3	Cenário preliminar 3	62
4	Análise do modelo proposto.....	64
4.1	Modelo 1	64
4.1.1	Lucro máximo	65
4.1.2	Estratégia 0	65
4.1.3	Estratégia 1	66
4.1.4	Estratégia 2	68
4.1.5	Estratégia 3	70

4.1.6	Estratégia 4.....	71
4.1.7	Resultados do Modelo 1.....	73
4.2	Modelo 2.....	75
4.2.1	Estratégia 0.....	76
4.2.2	Estratégia 1.....	77
4.2.3	Estratégia 2.....	78
4.2.4	Resultados do Modelo 2.....	82
5	Conclusões.....	83
6	Bibliografia.....	84

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem por objetivo estudar, através de um modelo baseado em agentes, o conceito de diferenciação de preços, que é uma prática de mercado bastante comum em empresas de todos os setores econômicos. Busca-se analisar a relação entre a diferenciação de preços e o lucro das empresas, bem como os impactos gerados na eficiência econômica. É realizada uma aplicação específica do modelo, com objetivo de encontrar a estratégia de diferenciação de preços que gera maior lucro para uma empresa do setor de transporte aéreo de passageiros que possuem monopólio sobre uma rota aérea.

Para empresas se manterem competitivas em mercados de clientes com preferências cada vez mais heterogêneas, é comum a busca da oferta de uma grande variedade de produtos e serviços. Tão fundamental quanto o processo criativo de inovação relacionado a essa busca é a estratégia de preços utilizada para obtenção do valor proposto aos diferentes clientes explorados, separando-os tanto de acordo com os atributos e a qualidade que esperam dos serviços e produtos, como também em relação a rentabilidade que oferecem para a empresa. É nesse contexto que a prática de discriminação de preços é empregada, que, apesar de ser um conceito bastante tradicional nos diversos setores do mercado, ainda é objeto de estudo de muitos pesquisadores. Esse assunto desperta interesse não só de empresas, como também do poder público, que buscar entender como a discriminação de preços pode afetar o bem estar econômico e social (CARROLL; COATES, 1999).

O presente trabalho busca contribuir para a análise dos efeitos gerados pela discriminação de preços, que, apesar de compreender uma aplicação específica, pode ser facilmente estendido para atender cenários mais genéricos em atividades produtivas diferentes da proposta.

As companhias aéreas oferecem diferentes tipos de passagens para um mesmo voo, que se diferenciam através dos serviços oferecidos aos clientes, como a classe de conforto (primeira classe e classe econômica, por exemplo), opção ou não de cancelamento (e a porcentagem do preço devolvida no caso do cancelamento), quantidade limite de bagagem, entre outras. Os preços oferecidos variam tanto em função dessas características como também em função do tempo restante até o voo. Essa variação é entendida no contexto de ciências econômicas como “discriminação de preços”, e pode fazer com que os preços dos vários tipos de passagens sejam mais próximos do preço que o público alvo da passagem está disposto a pagar,

potencialmente trazendo mais lucro para a empresa (CATLTON; PERLOFF, 1994). Esse tema é discutido nos capítulos 2.1.1 e 2.1.2.

A modelagem baseada em agentes (em inglês, *agent-based modeling*, ou ABM), resumidamente, consiste na modelagem e simulação do comportamento individual de cada agente que compõe um determinado sistema, para que seja verificado o impacto global que a soma dos diversos comportamentos individuais gera (NIAZI, 2011). Possui aplicações em diversas áreas do conhecimento, como a de engenharia, ciências sociais, econômicas e biológicas. É uma abordagem que vem se desenvolvendo recentemente, e se propõe a explorar o tipo de problema a ela relacionado de maneira mais detalhada e complementar a outras abordagens tradicionais (SAMUELSON, 2006). No cenário retratado por este trabalho, os agentes são os diversos potenciais compradores de passagens aéreas, bem como a (única) companhia aérea, que interagem de maneira probabilística. Mais detalhes e a análise bibliográfica desse tema são apresentados na seção 2.2.

O trabalho divide-se em 4 principais partes: introdução, conceitos, explicação do modelo proposto, e análise do modelo proposto.

A etapa de conceitos, desenvolvida no capítulo 2, compreende a pesquisa bibliográfica e explicação dos temas necessários para entendimento do modelo proposto, que são: determinação de preços em companhias aéreas e discriminação de preços, modelos baseados em agentes, e uma breve revisão sobre o conceito utilidade, distribuições de probabilidade e simulações de Monte Carlo.

O capítulo 4 discute em detalhes a estrutura do modelo proposto, fazendo uso dos conceitos desenvolvidos no capítulo anterior. Além disso, simulações iniciais e com parâmetros simplificados são mostradas, para que algumas conclusões preliminares sejam exploradas.

A etapa posterior é a análise do problema através do modelo proposto. São abordados diversos cenários que exploram possíveis estratégias de definição de preços, e são feitas comparações em relação ao lucro que trazem para a empresa, bem como o bem estar econômico que proporcionam para os clientes.

2 CONCEITOS

Os conceitos que formam os pilares para a elaboração do modelo utilizado para o estudo de diferenciação de preços são abordados a seguir.

Inicialmente, é discutida a discriminação de preços, que é o principal objeto de estudos deste trabalho. Como a aplicação específica proposta está relacionada ao setor de transporte aéreo de passageiros, a discriminação é abordada com foco em passagens aéreas, mas os mesmos conceitos podem ser expandidos para o tratamento de problemas semelhantes em outras indústrias e com estruturas potencialmente diversas.

Posteriormente, é explorado o tema da modelagem baseada em agentes, filosofia sob qual o modelo foi desenvolvido.

Por fim, são desenvolvidos os conceitos mais técnicos e específicos. O primeiro deles é o tema da utilidade e as medidas de eficiência e bem estar econômico, que ditam a maneira pela qual os potenciais clientes definem suas preferências e fazem suas escolhas, e medem o quanto uma estrutura econômica é preferível em relação a outra do ponto de vista dos consumidores. O segundo tema é o de teoria das filas, utilizado para modelar a chegada dos clientes para a realização de possíveis compras. Por último, é conceituado o método de Monte Carlo, utilizado para obtenção da distribuição de probabilidades dos resultados do modelo proposto, que é probabilístico.

2.1 Formação de preços no mercado de transporte aéreo de passageiros

As companhias de transporte aéreo de passageiros oferecem vários tipos de passagens com diferentes preços, para um mesmo voo, visando atrair consumidores com diferentes interesses em uma mesma viagem. Segundo Borenstein e Rose (1994), usualmente grandes companhias aéreas nos Estados Unidos oferecem, a todo o momento, cerca de 20 preços diferentes para passagens de uma mesma rota. A este processo dá-se o nome de diferenciação de preços, o qual é vastamente empregado pelas empresas do setor aéreo, com o objetivo de possibilitar a oferta do maior preço o possível por passagem, e, ao mesmo tempo, ocupar o maior número de lugares de um dado voo, uma vez que o custo fixo por viagem é elevado e poucos passageiros por voo podem acarretar em prejuízos para a empresa.

Os fatores que influenciam o preço das passagens aéreas e o processo de discriminação de preços entre consumidores estão explicitados nas duas seções que seguem.

2.1.1 Fatores que influenciam a formação dos preços das passagens aéreas

De acordo com Borenstein e Rose (1994), os preços das passagens aéreas são definidos em função de dois fatores: o custo da passagem para a companhia aérea, e a discriminação de preços para os diferentes tipos de clientes. Isto é, a variação do preço não é justificada

exclusivamente pela variação do custo dos serviços associados às passagens. As companhias podem cobrar preços muito superiores aos custos em determinados casos, quando percebem que os clientes estão dispostos a pagar mais pelos serviços disponibilizados pela passagem, ou cobrar preços próximos aos custos, quando os consumidores estão dispostos a pagar menos. Essa prática se refere ao conceito chamado de discriminação de preços, discutida no próximo capítulo.

Gillen, Oum e Tretheway (1990) analisam a estrutura de custos de companhias aéreas, dividindo-os em custos com mão de obra, combustível, capital e materiais. Esses autores, bem como Banker e Johnston (1993), constataram que a quantidade de passageiros que ocupa o avião não altera de forma significativa o seu custo, fazendo com que seja razoável assumir que o custo gerado por um passageiro adicional é zero. Isto é, o custo do avião será, de forma aproximada, o mesmo se ele partir totalmente ocupado, ou se partir vazio. Porém, Dana (1998) modela o custo de uma maneira ligeiramente mais sofisticada, propondo um custo k rateado por assento que será incorrido se ele for ocupado ou não (que é chamado de custo marginal de capacidade), e um custo adicional c , que será incorrido apenas se o assento for ocupado (que é chamado de custo marginal). Ambas as abordagens serão contempladas no modelo proposto.

Para definir a melhor maneira de definir os preços, a empresa deve saber, pelo menos parcialmente, o quanto os consumidores estão dispostos a pagar para obter os serviços diferenciados oferecidos, e o custo incorrido com os serviços oferecidos. Dentre os principais fatores que influenciam a definição do preço pelas companhias aéreas, cabe destacar:

DISTÂNCIA ENTRE ORIGEM E DESTINO DO VOO

Segundo Banker e Johnston (1993), o aumento da distância entre a origem e o destino do voo tem influência nos custos, já que é necessária uma quantidade de combustível maior, além de potencialmente requisitar mais mão de obra, e aeronaves mais sofisticadas e com maior custo da manutenção. Porém, existem ganhos em termos de custo por unidade de quilômetros percorridos pela aeronave, pois o maior gasto de combustível se dá na decolagem e na aterrissagem. Portanto, voos com a mesma capacidade em termos de quantidade de passageiros, mas com distâncias de viagens diferentes, têm custos maiores, e, por isso, espera-se que o preço também seja maior. Porém, se os preços estão relacionados exclusivamente aos custos, espera-se que o aumento não seja proporcional a distância, crescendo em proporção inferior.

Porém, segundo os mesmos autores, caso aeronaves maiores sejam utilizadas para as viagens mais longas, podem existir ganhos de escala, e o custo por assento pode até ser menor em relação de viagens de distâncias menores, mas com uso de aeronaves de menor capacidade. Stavins (2001) mostra que a distância tem pouca relevância no preço médio das passagens para os voos por ela analisados.

Não foi encontrado nenhum estudo que examinasse a relação entre o preço e o custo para diferentes distâncias de viagem, e é difícil de dizer qual é a estratégia de preços das empresas em relação a distância. Pode ser que, em relação a essa grandeza, o preço seja definido exclusivamente com base nos custos, ou pode ser que existam diferentes disposições a pagar pelos consumidores em função da distância percorrida, o que modificaria a estratégia de definição de preços da empresa, que levaria em conta também esse fator.

Como o presente trabalho estuda apenas uma única rota, o estudo da diferenciação de preços em função da distância da viagem não faz parte do escopo.

DATA E HORÁRIO DO VOO

Voos com a mesma origem e o mesmo destino podem ter preços diferentes em função da data e horário de chegada/saída. Borenstein e Rose (1994) mostram que essa característica potencialmente causa diferenciação nos custos da companhia aérea, principalmente nos custos de oportunidade.

Existem picos de demanda para voos em determinadas datas e horários, nos quais a empresa espera operar no limite de sua capacidade, seja por causa do número limitado de aeronaves que ela possui, ou por causa da infraestrutura limitada do aeroporto origem ou destino no momento do voo. O custo marginal (de forma mais precisa, o custo marginal de capacidade, conforme mencionado anteriormente) de um assento adicional em períodos de pico de operação é relativamente alto e crescente com a quantidade de assentos, já que envolveria mobilizar uma aeronave adicional, ou utilizar mais capacidade do aeroporto, que já está no auge da demanda e com recursos escassos (em termos de espaço físico com pistas de decolagem, controladores de voo e equipamentos de infraestrutura). Com um custo proporcionalmente maior, espera-se também um preço maior.

Além disso, nada impede que o tipo de cliente que deseja viajar entre duas cidades em uma determinada data seja diferente do tipo de cliente que fará a mesma viagem em outra data, e que eles estejam dispostos a pagar preços diferentes pelo voo com mesma origem e destino. Por isso, a variação do preço em função da data pode ser decorrência exclusivamente das

variações dos custos, ou pode ter influência também da percepção que a empresa aérea tem da disposição a pagar dos seus diferentes tipos de clientes.

O problema proposto contempla uma única viagem, em uma rota que a companhia possui monopólio. Portanto, as diferenças de preços em função da data do voo não fazem parte da presente análise.

PRAZO RESTANTE ATÉ O VOO NO MOMENTO DA COMPRA DA PASSAGEM

Segundo McAfee e te Velde (2007), a dinâmica do preço em função do tempo restante até a viagem é uma relação complexa. Usualmente, quanto maior o tempo restante até a viagem, menor o preço da passagem. A companhia aérea usualmente dá um prêmio, na forma de desconto, aos clientes que já sabem com antecedência que vão viajar, pois compras antecipadas contribuem para a redução da incerteza de ocupação da aeronave enfrentada pela empresa. Além disso, esse é um incentivo para os consumidores buscarem comprar as passagens o quanto antes, e não deixarem para a última hora, o que também acaba reduzindo as incertezas de demanda por parte da companhia.

Porém, quando o avião está prestes a decolar com assentos vazios, a companhia aérea pode, a fim de completar a ocupação da aeronave, cobrar preços bastante reduzidos, atraindo assim uma maior quantidade de clientes. O custo fixo da aeronave é proporcionalmente muito maior que o custo variável (conforme já discutido) e, portanto, viajar com o avião totalmente ocupado, mesmo que alguns assentos tenham sido preenchidos com um preço baixo, é uma opção melhor do que voar com assentos vazios.

Porém, se os clientes estão dispostos a pagar muito mais pela passagem nos últimos instantes antes do voo, uma queda nos preços não se justifica, e pode ocorrer exatamente o contrário.

Do ponto de vista do cliente, esperar até o último momento para a compra da passagem pode ser arriscado, já que nem sempre sobram assentos vazios no último momento, e a viagem pode ser perdida.

Os autores desenvolveram um modelo dinâmico de preços, no qual assumem que a demanda é probabilística, mas com distribuição de probabilidades constante ao longo do tempo, tanto em relação às quantidades de clientes quanto às respectivas disposições a pagar. Com esse cenário, a estratégia ótima para a empresa aérea é modificar o preço ao longo do tempo em função da quantidade de assentos vendidos até o momento. Nesse caso, observa-se que, na média, os preços inicialmente crescem ligeiramente. Quando o voo está próximo, o modelo

prevê, na média, uma queda brusca nos preços. Esse modelo teórico está de acordo com as discussões propostas nos parágrafos anteriores.

O modelo teórico foi então comparado com dados reais de preços de passagens aéreas. O principal ponto que não é condizente com as previsões do modelo é o fato dos preços reais apresentarem um notável aumento em momentos próximos ao encerramento das vendas. A justificativa é que a hipótese de disposição a pagar constante ao longo do tempo é violada: os clientes que comprem passagens nos últimos instantes estão dispostos a pagar mais, e a empresa, tendo ciência disso, eleva os preços.

Conclui-se também, pelo modelo, que a possibilidade de mudança dos preços quando restam muitas passagens a serem vendidas traz um ganho pouco significativo para a empresa em relação a uma estratégia de preço fixo e constante ao longo do tempo. O ganho é muito maior quando existem poucos assentos restantes.

Além disso, os autores discutem a terminologia de discriminação de preços. Segundo a discussão, mesmo no caso teórico de clientes com uma disposição a pagar pela passagem constante ao longo do tempo, a estratégia ótima para a companhia aérea é modificar os preços no decorrer do tempo. Essa modificação não busca necessariamente discriminar clientes com diferentes disposições a pagar, mas sim maximizar os lucros frente às incertezas futuras de demanda, o que não caracteriza uma discriminação de preços. Porém, podem existir diferenças da disposição a pagar ao longo do tempo, o que faria com que a variação do preço fosse decorrência, em parte, de uma diferenciação de preços em função do tempo restante até o voo.

Pela análise também concluiu-se que a incerteza na demanda traz ineficiências de mercado, pois a companhia aérea, por não saber de maneira determinística (isto é, com 100% de certeza) qual será a demanda futura, pode acabar vendendo muitos assentos a um preço mais baixo para os clientes que dão menor valor às passagens, e, no período futuro, quando os clientes que dão maior preferência às passagens aparecem para a compra, não há mais assentos disponíveis. Ou, de maneira inversa, a empresa pode subir o preço demasiadamente, perdendo vendas para diversos clientes, na expectativa de que clientes dispostos a pagar mais apareçam em um momento futuro, o que pode acabar não ocorrendo.

De maneira semelhante, Dana (1998) chega a conclusões próximas em relação à ineficiência de mercado. Se a incerteza em relação aos clientes que estão dispostos a pagar mais pela

passagem é muito alta, a diferenciação de preços ao longo do tempo pode dificultar o acesso desses consumidores às ofertas de passagens, que serão distribuídas por um preço menor para os clientes que dão menor valor para a viagem. Porém, se a incerteza for reduzida, e se os consumidores que estão dispostos a pagar mais estiverem mais concentrados em momentos próximos ao do voo, os resultados podem ser inversos: a discriminação pode promover a maior eficiência em relação ao cenário sem discriminação de preços ao longo do tempo, pois permite que seja ofertado um preço mais próximo do que o cliente está disposto a pagar. Além disso, também é questionado se essa prática pode ser chamada de discriminação de preços.

O autor comenta que, se for disponibilizada a opção de cancelamento da passagem com a devolução de parte do dinheiro, clientes terão maior incentivo para a compra antecipada de passagens, o que, dependendo das características dos consumidores, pode potencialmente reduzir as incertezas da demanda ao longo do tempo.

No presente trabalho, a estratégia de preços proposta McAfee e te Velde (2007) não será considerada, pois não foi aplicada em modelos cuja disposição a pagar dos clientes é mutável ao longo do tempo. Mas a estratégia de diferenciação de preços ao longo do tempo aqui proposta contemplará modificação apenas nos períodos finais de vendas, quando existem menos assentos ainda disponíveis a venda, por causa da conclusão dos autores de que é nessa situação em que existe maior vantagem com uso desse tipo de diferenciação.

POSSIBILIDADE DE CANCELAMENTO DA VIAGEM

Escobari e Jindapon (2008) propõe um modelo para a discriminação de preços através de passagens aéreas com ou sem reembolso no caso do cancelamento da viagem, que é sustentado por dados reais.

Segundo os autores, dependendo das características dos potenciais consumidores e das incertezas que eles possuem em relação ao possível cancelamento da viagem, uma companhia aérea monopolística consegue aumentar os lucros ao oferecer passagens com ou sem opção de reembolso. A opção ótima é oferecer um preço para as passagens com reembolso atrativo para os clientes com disposição a pagar mais pela viagem, e oferecer um preço menor para as passagens que não oferecem reembolso, destinadas aos clientes que estão dispostos a pagar menos. Parte dos preços oferecidos reflete exclusivamente a discriminação de preços entre os tipos de clientes, e parte do preço é utilizado para cobrir possíveis custos adicionais que o reembolso pode gerar.

Os autores, apesar de comentarem a respeito da possível redução da incerteza na demanda, não exploram esse assunto de forma profunda.

CLASSE DE CONFORTO

Não foram encontrados artigos que estudassem especificamente a discriminação de preços através da classe de conforto, mas Stavins (2001) mostra que o preço de passagens aéreas de primeira classe é bastante superior aos das demais, informação que também pode ser verificada empiricamente através das informações de preços oferecidas pelas companhias aéreas.

É de se esperar que o custo marginal de capacidade de passagens de alto conforto seja superior aos demais, já que os assentos usualmente ocupam maior espaço físico no avião, e possivelmente exigem equipamentos mais caros relacionados ao conforto. Além disso, o serviço em alimentação e em atendimento por parte da tripulação também pode aumentar o custo marginal, incorrido somente quando o assento é ocupado. Supõe-se que os serviços oferecidos aumentem os custos de passagens de alta classe de conforto, e que o aumento dos preços, em parte, sejam reflexo disso.

Porém, o aumento do preço não necessariamente está relacionado somente aos aumentos dos custos. Provavelmente as empresas cobram um preço proporcionalmente maior do que o aumento dos custos ao perceberem que clientes que desejam serviços de primeira classe estão dispostos a pagar mais. Sob essa hipótese, a discriminação de preços poderia ser aplicada através da classe de conforto oferecida.

POSSIBILIDADE DE ACÚMULO DE MILHAS EM PROGRAMAS DE FIDELIDADE

Borenstein e Rose (1994) chamam esse atributo de “plano para viajante frequente” (*frequent-flyer plans*, FFP). São planos que permitem benefícios para o cliente que compra passagens com frequência, que incluem acúmulo de milhas que resultam em descontos para futuras viagens, ou até em futuras viagens gratuitas. Usualmente, essas são vantagens destinadas para viajantes executivos, que tendem a viajar com muito mais frequência do que os turistas, e, por isso, dão um valor maior a passagens que contemplam esses planos.

Os planos têm como principal objetivo a maior fidelização do cliente, que terá menos incentivos em viajar por outras companhias aéreas, já que o acúmulo de milhas não poderá ser usado em empresas concorrentes. A empresa cobrará um preço maior por esse tipo de passagem, já que os clientes dão um valor maior para ela. Porém, o aumento da receita proveniente do preço superior usualmente é compensado pela redução das receitas resultantes

dos descontos em viagens futuras. Ou seja, com esse tipo de passagem, a empresa na realidade reduzirá sua receita unitária (por causa dos futuros descontos, apesar do aumento do preço da passagem em si), mas, com a fidelização, incentivará uma maior quantidade de viagens, obtendo maior receita total.

VIAGEM A NEGÓCIOS (TRABALHO) OU A TURISMO

Em relação à diferenciação dos preços entre passagens destinadas a turismo ou a negócios, uma forma de captar os diferentes passageiros pelas companhias aéreas chama-se “*Saturday-night stayover requirement*”. Isto é, a empresa oferece descontos para passagens com retorno aos domingos, relativamente às passagens com retorno agendado para sextas-feiras à noite ou sábados de manhã, por entender que os passageiros que retornam domingo viajam a turismo. Os executivos preferem voltar antes do domingo, para passar o fim de semana em casa, enquanto turistas são indiferentes quanto a essa restrição.

Como consumidores que viajam a negócios são pouco sensíveis aos preços das passagens aéreas, a companhia aérea cobra um preço maior para passagens com retorno antes do domingo, e oferecem desconto para as passagens que ocupam o fim de semana, destinadas aos clientes que viajam a turismo, usualmente mais sensíveis ao preço.

Stavins (2001) fez um estudo dos descontos dados a passagens com esse tipo de restrição, bem como dos descontos dados por compras realizadas com grande antecipação, visando entender como esses tipos de discriminação de preços funcionam em relação a competitividade do mercado. A autora conclui que, quando a competitividade entre as empresas aumenta, os descontos oferecidos são maiores, por causa do aumento da competição entre as companhias em relação aos clientes mais sensíveis a variações de preço, enquanto os preços cobrados aos executivos (menos sensíveis à variação de preços) se mantêm altos. Portanto, a disparidade entre os preços aumenta.

Hess e Polak (2006) mostram que passageiros que viajam a negócios são muito sensíveis ao tempo necessário para a viagem (que compreende o tempo total, entre a chegada ao aeroporto de origem até a saída no aeroporto de destino), e estão dispostos a pagar um preço relativamente alto para economizar o tempo gasto com a viagem. Portanto, pode existir diferenciação de preços entre viagens mais rápidas e mais demoradas em função das diferentes demandas, como, por exemplo, em voos com ou sem escalas.

OUTROS

Alguns outros atributos que podem influenciar na determinação dos preços das companhias aéreas e possivelmente oferecer espaço para discriminação de preços são:

- Opção de passagem só de ida, ou opção de ida e volta;
- Volume da bagagem a bordo permitida;
- Escalas.

Foi verificado que essas características fazem diferença no preço ofertado pelas empresas aéreas GOL e TAM, mas não foram observados os motivos específicos das variações por elas causadas, nem estudos científicos que analisassem o processo de diferenciação de preços devidos a estes fatores.

2.1.2 Discriminação de preços

Discriminação de preços é um conceito bastante difundido em ciências econômicas, que ocorre quando uma empresa vende um determinado produto por diferentes preços, em função do público de clientes para o qual é vendido. Essa é uma prática de mercado comum, decorrente da busca do aumento dos lucros através da segmentação dos clientes em função do quanto eles estão dispostos a pagar (STOLE, 2003).

De forma mais precisa, a discriminação de preços ocorre quando a razão entre o preço do produto e seu custo marginal se difere para os diversos segmentos de clientes. Essa definição implica que tanto a venda de dois produtos de mesmo custo por preços diferentes como a venda de produtos com custos diferentes por um mesmo preço são formas de discriminação de preços (CARROLL; COATES, 1999).

Carlton e Perloff (1994) oferecem uma definição mais abrangente, que inclui qualquer estrutura de preços com a qual empresas conseguem obter maior lucratividade em relação à alternativa de oferecer um preço único para todos os clientes. Essas estruturas aumentam o lucro das empresas porque possibilitam a cobrança de um preço maior para os consumidores que estão dispostos a pagar mais, e um preço menor para os clientes que estão dispostos a pagar menos.

Os exemplos são diversos, e incluem: diferenciação de preços em função do local geográfico em que o produto é vendido, como no caso de postos de gasolina (HEPPENSTALL; BIRKIN, 2006); diferenciação do preço ao longo do tempo, como no caso de passagens aéreas (DANA, 1998); descontos oferecidos exclusivamente para estudantes, diferença entre preços cobrados

por uma refeição em um mesmo restaurante para o almoço ou jantar, variação do preço entre mercadorias com qualidades diferentes, mas que não é proporcional a variação dos custos (CARROLL; COATES, 1999); variação do preço em função da quantidade de unidades transacionadas, como nos descontos dados para compras em atacado (McAFEE, 2008); diferenciação do preço para passagens aéreas destinadas ao turismo em relação àquelas destinadas a negócios (STAVINS, 2001), dentre outros.

Donaldson e Eaton (1981) analisam uma estrutura teórica de uma empresa que oferece dois tipos de vendas. Em um deles, uma mercadoria é vendida com rapidez, por um preço superior. No outro, a mesma mercadoria é vendida por um preço inferior, mas com uma demora maior para entrega. Os clientes então se dividem entre os “apressados” e “não apressados”, de acordo com o valor que dão para a mercadoria e para o tempo, escolhendo a alternativa que é mais adequada sob seus pontos de vista: a de maior preço, no caso dos apressados, e a de menor preço para os demais. Os autores mostram que é possível obter lucro superior com essa estratégia (em relação a oferecer um único tipo de venda) dependendo das características dos clientes e dos preços oferecidos.

Carroll e Coates (1999) propuseram três condições necessárias para que uma diferenciação de preços seja viável. A primeira condição diz que a empresa não pode ser tomadora de preços, pois precisa ter certo poder no mercado, no sentido de ter flexibilidade para definir seu preço sem perder todos os seus consumidores para os concorrentes por uma elevação mínima do preço. Assim, sendo, a empresa que emprega a discriminação de preços não pode atuar em mercados perfeitamente competitivos, que possuem uma enorme quantidade de pequenas empresas que individualmente não têm influência sobre o preço da mercadoria que ofertam. Além disso, empresas que atuam em mercados perfeitamente competitivos não podem reduzir seus preços, pois estes já estão no seu limite inferior, gerando lucro econômico nulo para as empresas (VARIAN, 2003).

Embora os autores tenham mostrado sua argumentação a favor da primeira condição, Dana (1998), Stavins (2001) e Borenstein e Rose (1994) mostram que em mercados bastante competitivos, como o mercado de aluguel de carros, companhias aéreas, hotelaria, restaurantes, e transportadoras (para mudanças), a diferenciação de preços ocorre, e pode aumentar com o crescimento da competitividade. Borenstein e Rose (1994) classificam a diferenciação de preços em dois tipos: aquelas que dividem clientes em relação a sua sensibilidade de preços através das várias companhias aéreas, que estão sujeitos a mudar de

empresa pela qual viajam, mas dificilmente deixarão de viajar de avião (chamada de diferenciação entre marcas, ou *among brands*, ou “diferenciação do tipo competitivo”); e aquelas que dividem clientes entre a sensibilidade de preços através de várias indústrias, que, se for o caso, poderão viajar de ônibus ou carro, ou deixar de viajar (chamada de diferenciação através de indústrias, ou *industry dependant*, ou “diferenciação do tipo monopolístico”). O autor propõe que a diferenciação do tipo monopolístico tende a ser maior em monopólios e reduzir com o aumento da competitividade, que segue a condição estabelecida de poder de mercado. Já a diferenciação do tipo competitivo cresce com o aumento da competitividade.

A segunda condição para a existência de discriminação de preços é que a empresa consiga controlar a venda de seus produtos de modo a limitar arbitragens e permitir que a diferenciação efetivamente exista na prática. Arbitragens são maneiras pelas quais os consumidores podem contornar a diferenciação de preço, tornando-a inexistente ou muito reduzida. Uma das possibilidades mais comuns de arbitragem se dá quando o consumidor consegue revender a mercadoria adquirida a preços diferenciados para outros clientes a preços mais elevados, de forma que, na prática, só existira um único preço sendo ofertado. Conforme exposto por Carroll e Coates (1999), a arbitragem pode ser evitada caso seus custos sejam muito altos, caso seja proibida por força da lei (como no caso de licenças e *copyrights*) ou se a própria natureza do produto ou serviço sendo ofertado não permitir arbitragens. Por exemplo, um corte de cabelo, um exame médico ou uma consultoria personalizada não podem ser revendidos. No caso de passagens aéreas, esse produto é nominal para um determinado cliente, que não pode revendê-lo para terceiros.

Outro exemplo simples é o de uma empresa que vende sua mercadoria para duas cidades vizinhas, por preços diferentes, já que a população de uma das cidades, por algum motivo, está disposta a pagar mais pelo produto. Caso os custos de transporte e armazenamento do produto sejam muito baixos, os clientes da cidade cujo preço é mais baixo comprarão a mercadoria para revender para os seus vizinhos. Na prática, a empresa então só acabaria vendendo produtos para consumidores de uma única cidade, que então revenderiam para a outra, existindo assim um único preço. Formas de coibir a arbitragem entre as cidades seriam a proibição da revenda combinada com a obrigatoriedade de apresentação do comprovante de residência para comprovar sua origem, elevado custo do transporte, ou a personalização do produto por consumidor.

Finalmente, a terceira condição é a existência de diferença na disposição a pagar por diferentes grupos de clientes. Caso os clientes possuam sempre mesma disposição a pagar, a empresa não terá benefícios ao diferenciar preços, pois não existe a possibilidade de separar aqueles que estão dispostos a pagar mais daqueles que estão dispostos a pagar menos. Quando as três condições são atendidas, a diferenciação de preços é possível e pode potencialmente trazer lucros superiores para a empresa.

Pigou (1932) propõe níveis diferentes de discriminação de preços: a discriminação de primeiro, segundo e terceiro grau.

A discriminação de preços de primeiro grau ocorre quando é possível distinguir o quanto cada consumidor individualmente está disposto a pagar. Este grau de discriminação de preços é o mais avançado e depende das condições que a empresa tem em obter informações precisas a respeito da disposição a pagar de cada indivíduo e oferecer um preço diferenciado para cada um deles, que abrangem fatores como permissão legal no setor e país em que a empresa opera, controle gerencial e financeiro suficientes para tal prática e o controle de arbitragens entre consumidores. Na prática, é muito difícil existir discriminação de preços de primeiro grau, visto que requer um nível muito detalhado de informações por indivíduo para conhecer sua disposição a pagar, embora seja a situação em que há o maior excedente do produtor possível (VARIAN, 2003). Porém, quem se apropria de todo o benefício dessa eficiência será a empresa, e os consumidores não obterão lucro econômico algum.

A discriminação de segundo grau ocorre quando a empresa fornece opções diferentes de preços de seus produtos, que refletem diferentes atributos dos serviços inclusos, e os consumidores escolhem qual opção lhes atende da melhor forma. Logo, os consumidores se dividem voluntariamente entre diferentes grupos aos quais os preços discriminatórios se aplicam e fornecem automaticamente as informações dos perfis dos diferentes grupos às empresas. Mesmo a empresa não tendo controle total sobre o comportamento dos seus consumidores e nem informações tão detalhadas sobre a demanda dos diferentes produtos e serviços oferecidos, ainda assim é possível existirem ganhos com esse tipo de discriminação. Alguns exemplos incluem diferentes planos de telefonia celular ofertados por empresas de telecomunicação e a redução de preços em função da quantidade comprada de uma determinada mercadoria. Muitas das práticas de discriminação de preços da indústria do transporte aéreo se enquadram nessa categoria, como os diferentes preços em relação a classes de conforto, e os descontos dados pela restrição de retorno no domingo.

No caso da discriminação de terceiro grau, a empresa não conhece a demanda individual de cada consumidor, mas sabe que existem grupos de consumidores com diferentes disposições a pagar. A empresa então oferta preços diferentes para cada um desses grandes grupos, sendo que indivíduos de um mesmo grupo estão submetidos a um mesmo preço, mesmo que tenham disposição a pagar diferenciada de seus pares. Neste grau de diferenciação, há menor eficiência na alocação econômica do preço, sendo o grau de discriminação de preços que resulta em menor nível de excedente do produtor quando comparado aos outros dois mencionados acima. Esse é o caso, por exemplo, de descontos dados a estudantes ou idosos, desde que comprovem a matrícula ou a idade. Borenstein e Rose (1994) citam o exemplo de uma companhia aérea que oferece um preço diferenciado exclusivo para estudantes de Harvard.

Vale mencionar que MacAfee (2008) e Stole (2003) também exploram os diferentes graus de discriminação de preços, mas mostraram que existem diversas outras categorizações interessantes, mas que não serão aplicadas no presente trabalho.

A principal forma de discriminação de preços abordada neste trabalho é a de segundo grau. Explora-se a diferenciação de primeiro grau somente para que seja estabelecido uma base de comparação, já que esse tipo é o que oferece maior lucro para a empresa, e o maior bem estar econômico. Observe que, para qualquer atributo que potencialmente possa fazer com que diferentes clientes valorizem de maneira diferente as passagens oferecidas, tais como mencionados na seção imediatamente anterior, são candidatos para uma possível discriminação de preços. O modelo não se propõe a examinar em detalhes como se dá essa variação na preferência dos consumidores, mas, dado que elas existem, se propõe a estudar como a empresa pode fazer uso disso para modificar as suas estratégias de preço.

2.2 Modelos baseados em agentes

Para ser possível a análise da estratégia de diferenciação de preços em um mercado monopolista do setor de passagens aéreas, foi utilizada uma metodologia que se baseia no comportamento individual e nas relações entre os agentes do mercado – consumidores e a companhia aérea. A metodologia em questão, cujos resultados são obtidos por meio de uma análise do desempenho gerado a partir das características individuais de cada agente do sistema, dá-se o nome de modelagem baseada em agentes (do inglês *Agent-Based Models*, ou ABM).

Niazi (2011), que menciona que a modelagem baseada em agentes é recente e está em processo de amadurecimento, define o conceito como modelos que se propõem a simular de maneira relativamente simplificada o comportamento de cada agente que compõe um sistema formado por uma grande população de agentes que interagem entre si, com ênfase na observação do comportamento global por eles gerados. A ABM busca compreender melhor não um determinado agente em si, mas sim como a interação entre agentes no nível micro se refletem no nível global (chamada também de análise *bottom-up*). O autor cita que esse tipo de modelo é empregado principalmente em sistemas sociais e políticos, econômicos, produtivos, ecológicos e biológicos.

A união de diversos agentes, que não necessariamente atuam de forma ordenada e totalmente racional, pode criar um comportamento coletivo bastante inteligente e coerente. Bonabeau (2002) chama esse comportamento de *emergent phenomena*, e o coloca como o principal interesse de modelos baseados em agentes (semelhante ao que Niazi (2011) colocou como comportamento global). Bonabeau também menciona que o comportamento do todo pode ser bastante contra intuitivo e distinto do comportamento individual. Por exemplo, um engarrafamento de veículos, que é resultado do comportamento e interações de cada motorista individualmente, pode se mover na direção contrária dos automóveis que o causam. Schelling (1978) mostra um modelo em que indivíduos que não desejam viver socialmente em uma situação de segregação cultural/social/econômica, mas que preferem viver próximos a semelhantes, fazem com que ocorra a segregação (mesmo que indesejada individualmente por cada agente).

Segundo Chang e Harrington Jr (2005), que estudam as estruturas de organizações, essa abordagem enriquece métodos tradicionais ao permitir que seja considerada a riqueza dos detalhes de cada um dos agentes individualmente, que são heterogêneos e interagem de forma complexa entre si e com o ambiente. Ao invés de considerar a organização como uma entidade com desejos e vontades próprias, ela pode ser encarada como um conjunto de agentes que interagem de maneira dinâmica e complexa, e que podem ter interesses diferentes e conflitantes entre si. Axtell *et al.* (2003) argumenta que, com essa abordagem, é possível estudar sistemas em que existe imperfeição de incentivos organizacionais e de regulamentações da indústria, ou em que exista presença de mercados incompletos e influência da mídia.

Esses são exemplos de situações em que as abordagens tradicionais apresentam certas limitações, e propõe-se que a modelagem baseada em agentes pode ser empregada para auxílio ao encarar as questões em maior nível de profundidade (PAGE, 2005). Para esse autor, a modelagem baseada em agentes pode ser usada como uma ferramenta exploratória da questão a ser solucionada. Ele também menciona que as principais características desse método que possuem atenção crescente de pesquisadores são: aprendizado, redes de interação, externalidades e heterogeneidade. Já Bonabeau (2002) cita quatro principais áreas de interesse para a aplicação para modelos baseados em agentes:

- Fluxos: tráfego de veículos, evacuação de pessoas dentro de construções, comportamento de consumidores andando dentro de uma loja;
- Mercados: mercado de capitais, mercados de leilão na internet, simulações estratégicas;
- Organizações: arquitetura organizacional e risco operacional;
- Difusão: difusão de novas tendências e da informação.

O ABM tem sido utilizado vastamente nos mercados de energia devido a suas características específicas de mercados regulamentados, nos quais o equilíbrio de preços é prejudicado pela concorrência imperfeita e pelas barreiras à entrada, tal como ocorre no mercado de transportes aéreos, em que intervenções do governo são comuns, principalmente via novas regulações do setor. Alguns trabalhos que merecem destaque são: Banal-Estanol e Micola (2010); Koritarov (2004), Tesfatsion (2010 e 2011), Somani e Tesfatsion (2008).

Roosmand *et al.* (2011) propõem um modelo baseado em agentes para análise da tomada de decisão de consumidores, que inclui aspectos e sociologia, psicologia, comportamento do consumidor e marketing e inteligência artificial.

É na linha de simular o comportamento de consumidores e empresas no mercado que a modelagem baseada em agentes será utilizada no presente trabalho. A interação entre empresas concorrentes e o aprendizado dela incorrido não é escopo do presente trabalho, mas esse tema é visto como uma potencial extensão do modelo aqui proposto.

Os potenciais clientes serão tratados individualmente, e uma estrutura pela qual eles fazem as escolhas das passagens aéreas ofertadas por uma companhia aérea é definida. Busca-se então prever qual será o resultado da interação entre a companhia e os consumidores.

2.3 Teoria das escolhas e o bem estar econômico

Quando trata-se de estudar o comportamento de indivíduos em questões econômicas, políticas ou sociais, usualmente existe interesse no comportamento de um grande número de agentes, expresso em termos de quantidades agregadas, como, por exemplo, a demanda agregada de uma mercadoria ou serviço, ou o bem estar agregado de uma sociedade. Porém, esse comportamento agregado é resultado de escolhas individuais, e, portanto, “a modelagem do comportamento individual é explicitamente ou implicitamente o cerne de todos os modelos preditivos de comportamentos agregados” (BEN-AKIVA e MOSHE, 1985, tradução nossa), afirmação que também é defendida pela modelagem baseada em agentes.

A chamada modelagem de escolhas (*choice modelling*) se propõe a entender como indivíduos se comportam quanto à tomada de decisão frente a escolhas. Especificamente, a análise de escolhas discretas (*discrete choice analysis*) busca examinar como indivíduos decidem entre duas ou mais alternativas discretas, como, por exemplo, a escolha do meio de transporte a ser utilizado para ir trabalhar (que se opõem a escolhas contínuas, como, por exemplo, a quantidade, em quilos, a ser comprada de uma determinada matéria prima para produção).

McFadden (1974), Ben-Akiva e Moshe (1985) e Hensher *et al.* (2005) exploram esses conceitos, aplicando-os na análise de problemas que envolvem transporte e viagens. A principal preocupação desses autores é o desenvolvimento de métodos e ferramentas que permitam a identificação das preferências dos indivíduos em análise, permitindo que a teoria seja utilizada para prever a demanda dos cidadãos aos diversos meios de transporte disponíveis, para o planejamento do transporte público em uma determinada região. Os principais conceitos retirados desses trabalhos para o presente estudo são a utilidade (*utility*) e a chamada disposição a pagar (*willingness to pay*). Esses serão os conceitos chaves utilizados no modelo aqui proposto, que definirão como clientes decidem se realizarão a compra de passagens ou não, e qual passagem será comprada.

O tema da economia do bem estar (*welfare economics*) busca entender como o bem estar econômico e a eficiência econômica de uma sociedade podem ser alcançados e maximizados a partir de políticas governamentais e de decisões de empresas e famílias, e faz uso dos conceitos da utilidade individual com a finalidade de medir o quanto as preferências dos indivíduos foram atendidas. Aronsson e Löfgren (2007) e Slesnick (1998) discutem o tema, mostrando maneiras pelas quais a eficiência do mercado e o bem estar econômico podem ser

medidos, conceitos que também serão utilizados para análise dos resultados do modelo aqui proposto, explicados a seguir.

2.3.1 Utilidade

O conceito de utilidade é antigo, e é discutido desde pelo menos o século 18, com artigo de Bernoulli (1738), mas que teve desenvolvimento mais recente com a axiomatização proposta por Von Neumann e Morgenstern (1944), sendo frequentemente utilizado sob o contexto de análise da decisão sob incertezas e riscos.

A utilidade é a medida do quanto uma alternativa é preferida em relação a outra alternativa por um tomador de decisões. Ela é o valor subjetivo que o indivíduo dá para cada uma das escolhas a ele disponibilizadas, e é função dos atributos de cada alternativa. O tomador de decisões escolherá a alternativa que lhe proporciona a maior utilidade. Por exemplo, quando um cidadão for escolher o transporte que usará para ir trabalhar, entre metrô, ônibus ou carro, ele dará um valor para cada uma dessas alternativas, em função dos seus atributos (como tempo de viagem, conforto, quantidade de dinheiro gasto, riscos de acidentes, etc), e escolherá aquela de maior valor (Hensher et al., 2005).

As alternativas podem ser mais complexas, e incluir riscos e incertezas. Por exemplo, um tomador de decisões pode ser submetido a três escolhas em relação a um jogo:

- A. jogar em uma loteria na qual ele tem 50% de probabilidade de ganhar R\$ 25.000,00, e 50% de perder R\$ 24.900,00;
- B. jogar em uma loteria na qual ele tem 50% de probabilidade de ganhar R\$ 200,00, e 50% de perder R\$ 100,00;
- C. não jogar em nenhuma loteria.

Nesse exemplo, os resultados compreendem exclusivamente o ganho ou não de dinheiro. Observe que as alternativas A e B podem resultar em perdas e ganhos, e a alternativa C sempre oferece um resultado nulo, sem ganhos nem perdas. A opção do tomador de decisões nesse caso dependerá do seu apetite pelo risco.

O presente trabalho não fará uso de toda a teoria da utilidade, que inclui a análise da decisão sob incertezas, como no exemplo das loterias apresentadas¹, pois essa complexidade foge do escopo proposto. A utilidade será utilizada somente como um número real que reflete o valor

¹ Para mais detalhes, ver Bekman e Neto (1980)

que o tomador de decisões dá para as diversas alternativas que lhe são propostas, em função da preferência que ele atribui a elas.

O conceito de utilidade é fundamental para o entendimento da chamada disposição a pagar, que será conceito chave para o modelo proposto. Além disso, é subsídio para discussões sobre bem estar econômico e eficiência de mercado. Ambos os temas são explorados a seguir.

2.3.2 Disposição a pagar

Suponha que um indivíduo tem uma quantidade x_0 de uma determinada mercadoria, e um patrimônio (em dinheiro) de y_0 . Nesse estado, o indivíduo possui uma utilidade $u_0 = u(x_0, y_0)$. Vamos supor que a utilidade do indivíduo é crescente em ambos os argumentos. Isto é, quanto mais patrimônio em dinheiro, e quanto maior a quantidade de mercadorias, maior a utilidade, e, portanto, mais satisfatório é o estado.

Suponha que seja oferecida uma unidade adicional dessa mercadoria, por um determinado preço p . Se o indivíduo aceitar essa mercadoria adicional por esse preço, ele ficará com a quantidade $x_1 = x_0 + 1$ (o que aumentará sua utilidade), e com o patrimônio $y_1 = y_0 - p$ (o que reduzirá sua utilidade). Sua utilidade será então $u_1 = u(x_0 + 1, y_0 - p)$. O indivíduo só estaria disposto a realizar essa transação caso sua utilidade aumentasse com a compra, isto é, $u_1 \geq u_0$. Se o preço for muito alto, o benefício de ter uma unidade adicional da mercadoria não compensará a perda com o desembolso dinheiro. Se o preço for baixo o suficiente, o indivíduo sairá ganhando, pois a mercadoria trará mais benefícios do que as perdas geradas pelo desembolso do dinheiro.

Qual seria o preço máximo p_{max} que o indivíduo estaria disposto a pagar por essa mercadoria adicional? Seria o preço que mantém a igualdade $u_1 = u_0$. É o preço que faz com que a utilidade do indivíduo após a compra seja igual a utilidade antes de compra. Ou seja, é o preço p_{max} que satisfaz a seguinte equação:

$$u(x_0, y_0) = u(x_0 + 1, y_0 - p_{max}) \quad (1)$$

Esse preço é a chamada disposição a pagar (*willingness to pay*) do indivíduo (HOROWITZ e McCONNELL, 2003), também aqui chamado de preço máximo que o indivíduo está disposto a pagar pela mercadoria.

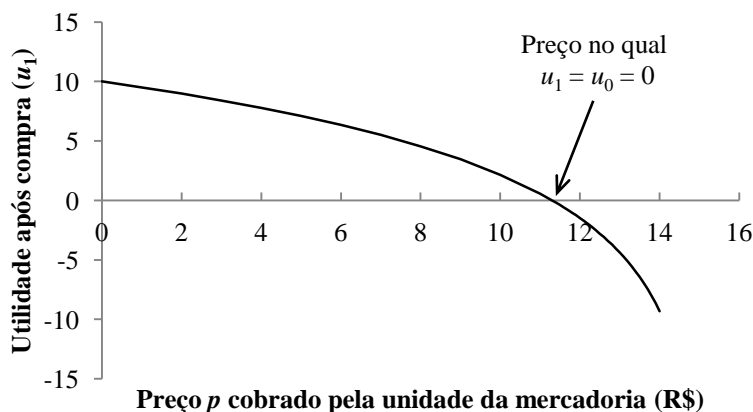
Pela equação (1), é possível observar que, quanto mais o argumento $x_0 + 1$ contribuir para o aumento da utilidade, maior será o preço p_{max} necessário para reduzir a utilidade e torná-la

igual a $u(x_0, y_0)$. Isto é, quanto mais se dá preferência para a unidade adicional da mercadoria, maior será a disposição a pagar do indivíduo.

Para ilustração, foi escolhida uma função utilidade $u(x, y)$ arbitrária, crescente em ambos os argumentos, de tal forma que a utilidade no estado inicial é nula (isto é, $u_0 = 0$). Quando o indivíduo ganha uma unidade adicional da mercadoria de graça, sua utilidade se torna 10. Caso a mercadoria seja obtida por um preço superior a zero, a utilidade resultante é menor do que 10. Se o preço for alto demais, a utilidade se tornará menor do que zero. O gráfico 1 ilustra esse cenário.

Observe que, no exemplo, se o preço estiver entre zero e aproximadamente R\$ 11,30, o indivíduo terá uma utilidade maior que zero depois da compra. Isto é, ele aumentará sua utilidade realizando essa transação. Para preços acima de R\$ 11,30, a utilidade é menor do que zero, que é menor do que sua utilidade antes da compra. Nesse caso, o cliente não desejará fechar esse negócio. Nos exatos R\$ 11,30, o indivíduo é indiferente em relação a compra, e esse é o limite chamado de disposição máxima a pagar.

Gráfico 1: Exemplo ilustrativo da disposição a pagar



É de se esperar que, em um processo de negociação, o comprador da mercadoria deseje obtê-la pelo preço mais baixo o possível, e o vendedor da mercadoria deseje vendê-la pelo preço mais alto o possível dentro dos limites aceitáveis para o comprador. O vendedor desejará vender a mercadoria, se possível, pelo que acreditar ser o preço máximo que o seu cliente está disposto a pagar, que é R\$ 11,30 no exemplo.

2.3.3 Medidas de bem estar econômico e o *payoff*

De acordo com Aronsson e Löfgren, a busca de estruturas governamentais e de mercado que geram o maior bem estar econômico é um assunto de interesse constante de economistas há tempos. Conforme visto em Slesnick (1998), Aronsson, Backlund e Löefgren (2001) e Dumagan e Mount (1992), os autores se preocupam com diversos aspectos dessa questão, como qual é a melhor definição de bem estar econômico, como medi-la, e como alcançar a situação ideal de melhor bem estar geral. A maneira tradicional de medição de bem estar econômico e social é a utilidade. Usualmente, define-se que a melhor sociedade é aquela que permite a maior soma da utilidade dos participantes. Existem diferentes maneiras pelas quais a utilidade total pode ser calculada, e cada uma delas possui suas vantagens e desvantagens.

As principais críticas apresentadas pelos autores quanto às medidas mais tradicionais são duas. A primeira está relacionada ao fato de que, quando busca-se maximizar o bem estar econômico e social através dos conceitos tradicionais, a desigualdade não é considerada. Segundo essas métricas, uma sociedade que permite mais riquezas, mesmo que estejam concentradas nas mãos de poucos indivíduos, é superior a uma sociedade que permite menos riquezas, mesmo que elas estejam distribuídas de maneira uniforme.

De maneira mais geral, critica-se que o bem estar social não deve ser baseado somente em medidas puramente econômicas, mas deve-se também pensar em outras características, que envolvem questões ambientais, culturais, políticas e sociais, que usualmente não são consideradas nas abordagens puramente econômicas.

Não é escopo do trabalho se aprofundar nessas questões, e é recomendado ao leitor interessado buscar os trabalhos dos autores mencionados. Para medição da utilidade, será utilizado um conceito puramente econômico, conforme utilizado por Dana (1998) e McAfee e te Velde (2007). O bem estar econômico será definido como a soma do lucro da empresa com o *payoff* dos diversos indivíduos que compraram as passagens. O *payoff* é a diferença entre o preço máximo que o indivíduo estava disposto a pagar pela passagem (isto é, a disposição a pagar) e o preço efetivo que ele acabou pagando.

Isto é, situações que permitem grandes lucros para a empresas, e grandes diferenças entre o quanto os clientes estavam dispostos a pagar e o que efetivamente pagaram são as preferíveis. Observe que o *payoff* é corresponde ao conceito de lucro econômico dos consumidores.

2.4 Teoria das filas de distribuição de probabilidades de Poisson

Filas fazem parte do dia a dia de muitos serviços e operações, e são estudadas de maneira quantitativa pela chamada teoria das filas. Segundo Winston (2004), a um sistema de filas está associado um processo de entrada (também chamado de processo de chegada), e um processo de saída. Exemplos de processos de entrada são: chegada de clientes a uma agência bancária, pedidos de pizza para uma pizzaria, chegada de doações de sangue em um hospital com banco de sangue, e chegada de navios com falhas mecânicas em um estaleiro, para reparos. Os processos de saída correspondentes seriam: atendimento dos clientes pelos funcionários da agência bancária, envio do entregador de pizzas para atendimento do cliente, uso das doações de sangue por pacientes do hospital, e o conserto do navio e posterior retorno ao mar.

Existem modelos estatísticos que fazem a previsão do funcionamento dos processos de entrada e saída. No trabalho aqui proposto, apenas o funcionamento dos processos de entrada são de interesse, pois servirão de base para a definição da chegada de clientes para compras de passagens aéreas.

Conforme explicado pelo autor, usualmente assume-se que o processo de chegada é independente da quantidade de clientes no sistema. Isto é equivalente a dizer que, independentemente de existirem 5 ou 500 pessoas na agência bancária, a chegada de clientes será mesma. Porém, existem situações em que o processo de chegada não é independente da quantidade de clientes no sistema. É o caso do decréscimo da chegada de clientes em ambientes muito cheios. Por exemplo, a chegada de clientes em uma determinada agência bancária pode ser reduzida se o estacionamento estiver cheio, por causa da desistência dos clientes ao perceberem a lotação. Outra situação em que isso ocorre é quando a população de clientes é muito pequena, e a probabilidade de um indivíduo chegar quando o sistema está cheio é menor pelo fato de existirem poucos indivíduos restantes que não estão no sistema. Por exemplo, em um porto no qual existem apenas 4 navios, a probabilidade da chegada de mais um navio para reparos no estaleiro é muito baixa se já existem 3 navios em conserto. Porém, se todos estão no mar, a chance da chegada de um navio adicional no estaleiro é mais alta.

No modelo aqui proposto, a chegada de clientes que desejam consultar o preço das passagens aéreas disponíveis possuirá uma estrutura independente de qualquer outro parâmetro do modelo, e será modelado com a hipótese de que independente da quantidade de clientes no sistema.

Com a hipótese proposta, usualmente modela-se o tempo de espera entre a chegada de clientes através de uma distribuição de probabilidades. As distribuições de probabilidades mais empregadas nesse caso são a exponencial, ou a de Erlang, que assumem que a distribuição de chegada dos clientes é a de Poisson, conforme exploradas a seguir.

2.4.1 Chegada aleatória de indivíduos e distribuições de probabilidades associadas

Antes de entrar em detalhes na questão, segue uma breve explicação a respeito de variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade.

Suponha que deseje-se estudar o tempo de vida de um determinado tipo de lâmpada. Pode-se fazer uma experiência, na qual a lâmpada é ligada na tomada, e conta-se o tempo decorrido até que uma falha ocorra. Nesse caso, o resultado que está sob análise é o tempo t de vida da lâmpada. Se a experiência for repetida diversas vezes, e o tempo de vida sempre resultar no exato mesmo valor, então pode-se dizer que o tempo de vida é determinístico. Nesse caso, o resultado é único, e ocorre 100% das vezes. Porém, o mais comum é que o tempo de vida seja diferente para cada vez que a experiência for realizada. Em algumas das vezes, a lâmpada vai durar mais, e em outras, menos. Nesse caso, não é possível termos 100% de certeza de qual será o tempo de vida da lâmpada na próxima realização da experiência, mas podemos saber a distribuição de probabilidades do tempo de vida da lâmpada. Isto é, associa-se uma probabilidade a cada resultado possível do experimento, como $P_i = F(t_i)$, na qual P_i é a probabilidade do tempo de vida da lâmpada ser igual ou inferior a t_i . A função F é chamada de distribuição de probabilidades, ou distribuição acumulada de probabilidades.

No exemplo, o tempo de vida da lâmpada é chamado de variável aleatória, pois, a cada vez que a experiência é realizada, essa variável pode ter um valor diferente, de acordo com a aleatoriedade da distribuição de probabilidades associada a ela. Mais detalhes sobre distribuições de probabilidade e variáveis aleatórias podem ser encontrados em Devore (2011).

Na teoria das filas, a chegada de clientes em um determinado sistema também é uma variável aleatória. A quantidade de clientes que chegam dentro de um determinado intervalo de tempo, ou o tempo que decorre entre duas chegadas são variáveis aleatórios, e essas grandezas possuem suas distribuições de probabilidade.

Usualmente, pressupõe-se que o momento da chegada de clientes é uma variável completamente aleatória, no sentido de ser uniformemente distribuída ao longo do tempo. Isto

é, apesar de não se saber exatamente quando o próximo cliente vai chegar, assume-se que não existe concentração em um determinado horário ou data, e que a quantidade média de clientes esperados dentro de um intervalo de tempo é constante a qualquer horário do período estudado.

Como exemplo, suponha que a probabilidade de um indivíduo chegar em um determinado sistema a cada segundo é muito pequena, mas finita e maior que zero. Digamos que a probabilidade seja de 0,2%. Nesse caso, espera-se, em média, 0,002 clientes por segundo, ou um cliente a cada 500 segundos. Isto é equivalente a, em média, um cliente a cada 8 minutos e 18 segundos, equivalente também a 7,2 clientes por hora. Ou seja, apesar do aparecimento de clientes a cada segundo ser aleatório, com uma probabilidade muito baixa, diversos clientes por hora são esperados.

A quantidade de clientes que aparecem dentro de um intervalo de tempo, no exemplo proposto, seguirá uma distribuição de Poisson, que modela exatamente eventos aleatórios como o descrito. A partir da média λ de eventos esperados por unidade de tempo (por exemplo, 7,2 chegadas por hora), é possível obter, através dessa distribuição, a probabilidade P_k de uma determinada quantidade k de eventos (por exemplo, 14 chegadas) ocorrerem dentro de um intervalo de tempo τ definido (por exemplo, 2 horas). Essa distribuição de probabilidades também é usada em outras situações que envolvem aparecimento aleatório, mas que não envolvem o tempo. Por exemplo, ela pode ser usada no cálculo da probabilidade do aparecimento da quantidade de falhas em uma determinada metragem linear de um tecido, em função da quantidade média de falhas esperadas por metro linear. A equação para essa função é dada por:

$$P_k = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!} \quad (2)$$

Para a geração de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson em processos de simulação, são utilizadas fórmulas obtidas a partir da equação 2. Define-se $F(x)$ como a probabilidade de se observar x ou menos aparecimentos no intervalo de tempo τ , com taxa de chegada média por unidade de tempo de λ . Nesse caso, $F(x) = \sum_{j=1}^x P_j$. Define-se M como a função inversa de F , isto é, $M(F(x)) = x$. Ela obtém a quantidade máxima de aparecimentos x que ocorrem com uma dada probabilidade F . Para gerar variáveis aleatórias y que seguem a distribuição dada pela equação 2, basta definir $y = M(x_{uniforme})$, na qual $x_{uniforme}$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e 1, facilmente gerada em *softwares*

como Excel e MatLab. A função M é usualmente calculada através de métodos numéricos, e também está presente em ambos os *softwares*, e é chamada de “função Poisson inversa”.

Observe que a equação 2 modela a quantidade de indivíduos que aparecem no sistema dentro de um intervalo de tempo. Se os indivíduos aparecem no sistema com esse padrão de comportamento, então a distribuição de probabilidades do tempo t entre as chegadas dos indivíduos segue uma distribuição de probabilidades exponencial (WAYNE, 2004), cuja função de densidade de probabilidade obedece a seguinte equação:

$$p_t = \lambda e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Os gráficos 2 e 3 representam as probabilidades associadas às duas variáveis aleatórias.

Gráfico 2: Distribuição de probabilidades da quantidade de clientes que aparecem em um intervalo de $\tau = 2$ horas, com $\lambda = 7,2$ clientes por hora

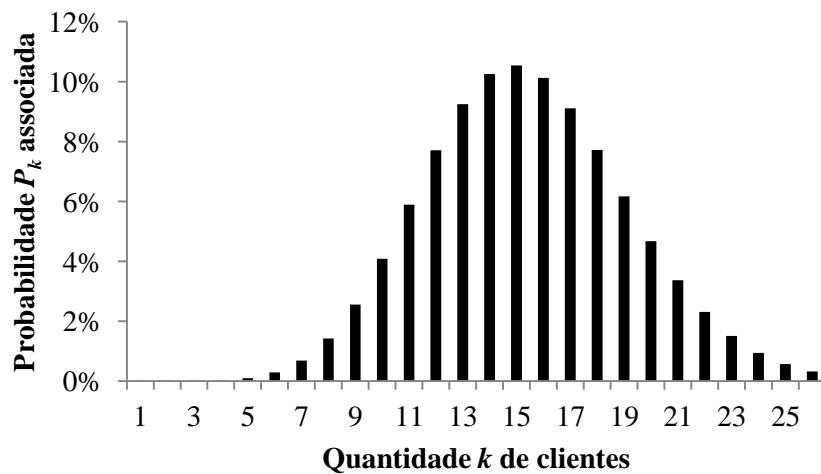
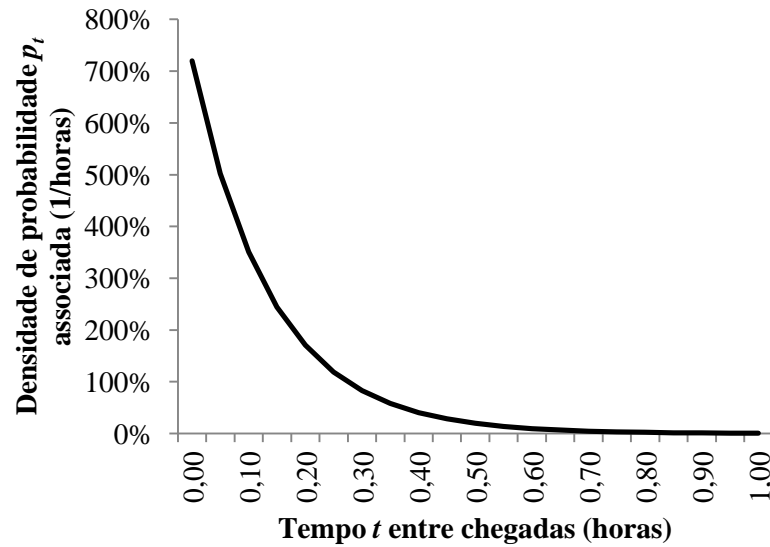


Gráfico 3: Densidade de probabilidades do tempo de espera entre chegadas de clientes, com $\lambda = 7,2$ clientes por hora



A distribuição de probabilidades de Erlang possui dois parâmetros: λ e n . Ela é a distribuição associada ao tempo de espera necessário para serem observadas n chegadas. Quando $n = 1$ essa distribuição se torna idêntica à exponencial. Apesar das distribuições de probabilidade exponencial e de Erlang serem bastante empregadas em teoria das filas e terem forte relação com a distribuição de Poisson, elas não serão utilizadas no presente trabalho. Apenas a distribuição de Poisson será empregada de maneira direta.

A hipótese de que a média esperada de clientes por unidade de tempo é sempre constante foi considerada muito forte para o presente trabalho, e uma adaptação foi proposta para que o modelo de chegadas de clientes possa compreender também situações em que exista uma maior concentração de chegadas em determinados períodos.

A estrutura proposta funciona da seguinte maneira: dentro de um determinado período, digamos, entre $T_{inicial_1}$ e T_{final_1} , os clientes aparecem com uma determinada taxa de chegada λ_1 constante. Dentro do próximo intervalo de tempo, que se dá entre $T_{inicial_2}$ e T_{final_2} , os clientes aparecem com outra taxa de chegada constante, λ_2 . Observe que, dentro do período 1, a quantidade de clientes que surgem obedece uma distribuição de Poisson, e, dentro do período 2, também obedece uma distribuição de Poisson, mas com parâmetros diferentes. Se, por exemplo, $\lambda_1 > \lambda_2$, é de se esperar que, apesar da chegada de clientes ser aleatória, mais clientes aparecerão por unidade de tempo, na média, no período 1.

De forma mais completa, a chegada de clientes é modelada com uma curva do tipo $\lambda = f(T)$ (isto é, a taxa de aparecimento é função do tempo). O tempo é dividido então em diversos intervalos, do tipo $T_{inicial_1}$ e T_{final_1} , $T_{inicial_2}$ e T_{final_2} , ..., $T_{inicial_i}$ e T_{final_i} . A taxa de chegada λ_i será constante durante todo o período i , e será definida por $\lambda_i = f(T_{inicial_i})$. Para o modelo proposto, propõe-se dividir o horizonte de tempo considerado em diversos pequenos intervalos de dimensão muito menor que o total, se aproximando de intervalos infinitesimais.

Com essa estrutura, é possível que os clientes apareçam, por exemplo, com mais frequência no início do período de modelagem considerado do que no final, ou vice-versa. Ela permite que existam picos de demanda em determinados períodos, e falta de procura em outros.

Quando o resultado da simulação é obtido através de operações matemáticas realizadas com diversas variáveis aleatórias, a distribuição de probabilidades final pode ser bastante complexa, e de difícil cálculo analítico ou até mesmo numérico. Uma alternativa para solucionar esse problema é com o emprego do método de simulações de Monte Carlo. Esse é o caso do modelo aqui proposto, e, por isso, essa técnica será utilizada.

2.4.2 Simulações de Monte Carlo

O método de simulações de Monte Carlo é utilizado em problemas que envolvem variáveis aleatórias e distribuição de probabilidades, e consiste na realização de diversas simulações independentes da experiência especificada, onde são utilizados números gerados de forma aleatória em cada uma delas para que seja obtida a variável resposta. As frequências relativas de cada resultado são então utilizadas como uma aproximação da distribuição de probabilidades do experimento proposto (WINSTON, 2004).

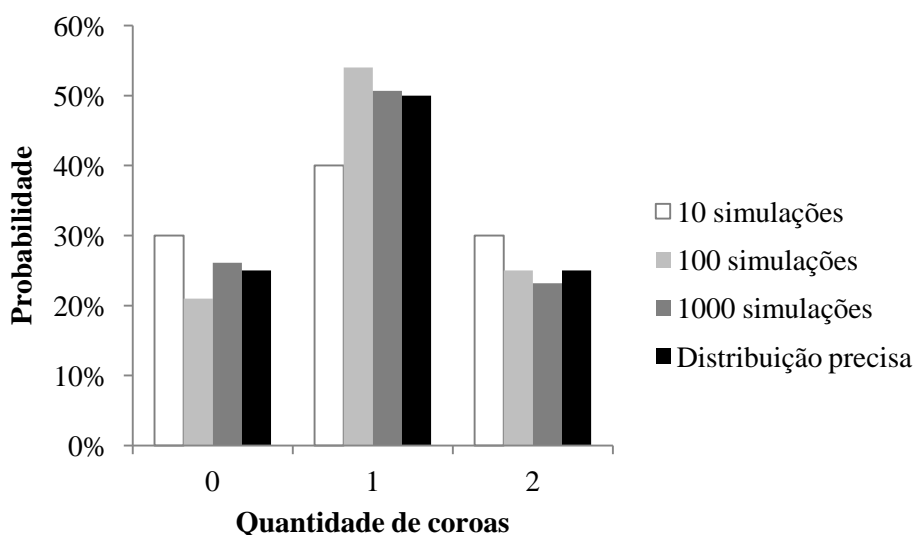
Por exemplo, deseja-se descobrir qual é a distribuição de probabilidades da quantidade de coroas obtidas em um experimento em que uma moeda não viciada é jogada duas vezes. Como a moeda não é viciada, a probabilidade de se obter cara em cada jogada é igual a de se obter coroa, que é igual a 50%.

Nesse caso, a experimento é simples, e sabe-se que a distribuição de probabilidades será: 25% para 0 coroas, 50% para 1 coroa, e 25% para 2 coroas, mas suponha que ela não é conhecida. Pelo método de Monte Carlo, diversas simulações seriam realizadas para buscar o resultado. Cada simulação consistiria em duas jogadas de uma moeda, com 50% de chance de obtenção de coroa em ambas. Em cada simulação, o computador gera um resultado aleatório para cada

uma das moedas, com 50% de chance de obtenção de cara, e 50% de obtenção de coroa, e a quantidade total de coroas obtidas no final da simulação é guardado.

Após a execução de diversas simulações, conta-se a porcentagem de simulações que resultaram em 0, 1 ou 2 coroas. Se o comportamento das moedas for gerado com números realmente aleatórios, essas porcentagens são uma aproximação da distribuição de probabilidades do problema proposto. Quanto maior a quantidade de simulações utilizadas, mais próximo ao resultado correto será a distribuição obtida. O gráfico 4 mostra a distribuição de probabilidades obtida com o método de Monte Carlo para 10, 100 e 1.000 simulações, além da distribuição precisa da experiência proposta.

Gráfico 4: Resultado de simulações de Monte Carlo comparados com a distribuição precisa



Esse método é utilizado quando a variável resposta do problema (no exemplo, a quantidade de coroas) é uma função muito complexa das diversas variáveis aleatórias contidas no problema (que, no caso, foram os dois lançamentos de moeda), e a solução analítica é de difícil obtenção.

Essa técnica será empregada no modelo aqui proposto. As variáveis geradas aleatoriamente serão as chegadas dos clientes ao longo do tempo, conforme proposto no capítulo anterior. Esses clientes então vão interagir com a companhia aérea de maneira dinâmica, comprando ou não alguma das diversas passagens oferecidas, potencialmente gerando receitas e custos para a empresa. O resultado complexo dessa simulação usualmente não será obtido através de cálculos usuais, e, por isso, justifica-se o emprego do método de Monte Carlo.

3 MODELO PROPOSTO

No estudo aqui apresentado, analisa-se um mercado monopolista, do setor de transportes aéreos. Os agentes são os consumidores, que demandam passagens aéreas, e a companhia aérea, que, por sua vez, oferece diversos tipos de passagens para um mesmo voo, com diferenças entre os serviços inclusos no preço das passagens, tais como conforto, opção de cancelamento ou alteração da data da viagem, dentre outros.

A companhia aérea monopolista está interessada em entender qual é a estratégia de preços ao longo do tempo de cada tipo de passagem que resultará na maximização do lucro com o voo.

Um objetivo secundário é a análise do quanto a necessidade de cada um dos potenciais clientes está sendo atendida, e se a estratégia da companhia aérea acaba por aumentar ou não o bem estar da população de clientes.

A estrutura do modelo é bastante parametrizável, e pode ser modificada em função do cenário a ser estudado.

3.1 Descrição geral

O modelo proposto é composto por duas diferentes categorias de agentes: os clientes, e uma companhia aérea. Os clientes são sempre pertencentes a um único dos n diferentes grupos de clientes, que representam as características principais de preferências e de frequência de aparecimento dos indivíduos que o compõe. Por exemplo, pode existir um grupo dos clientes de alta renda que estão dispostos a pagar um alto preço por qualquer tipo de passagem, mas que preferem aquelas que oferecem serviços de primeira classe. Esses clientes seriam menos frequentes. Outro tipo de grupo de cliente poderia ser aquele que representa indivíduos de mais baixa renda, que estão dispostos a pagar menos pelas passagens, e que aparecem com maior frequência.

A frequência, nesse caso, é a quantidade de vezes por unidade tempo que clientes de um determinado tipo consultam os preços das passagens aéreas da empresa para uma possível compra. Os clientes consultam os preços assim que decidem viajar para o local destino do voo. A frequência de consultas pode ou não variar ao longo do tempo. Por exemplo, pode ser que, no caso do grupo de clientes que viajam a turismo, seja muito raro o aparecimento de indivíduos que desejam viajar em cima da hora, momentos antes do voo. Para esse público, espera-se que exista um planejamento com razoável antecedência, e clientes desse tipo aparecem com mais frequência meses antes do voo. Já para clientes executivos, que viajam a

negócios, o planejamento é muito mais difícil, já que usualmente as viagens são imprevisíveis, e talvez seja mais adequado modelar a frequência de chegada dos indivíduos como constante ao longo do tempo.

Caso, no momento da consulta, o preço da passagem esteja superior ao quanto o cliente está disposto a pagar, esse cliente não comprará a passagem, e não voltará mais para comprá-la em um momento futuro. Essa estrutura do modelo é razoável quando parte-se da hipótese de que os clientes possuem a expectativa de que o preço da passagem irá aumentar, e, portanto, se a passagem está muito cara no momento da consulta de preços, estará mais cara ainda em um momento futuro. Portanto, o cliente sabe que não há necessidade de voltar a fazer uma nova consulta de preços no futuro, já que o preço estará ainda mais além do limite razoável de quanto ele está disposto a pagar. Essa é uma simplificação, já que, na realidade, existe sim a possibilidade dos preços abaixarem em determinados momentos, em função da estratégia adotada pela companhia aérea.

Pressupõe-se também que clientes que pertencem a um mesmo grupo, mas que consultam os preços das passagens em instantes diferentes, possuem diferentes disposições de preços. Portanto, é possível que um cliente que deseja viajar a turismo e que consulta o preço das passagens momento antes do voo esteja disposto a pagar mais pelo voo do que outro cliente que também viaja a turismo, mas que conseguiu se planejar com antecedência e buscou comprar a passagem meses antes do voo. Por isso, a disposição a apagar de um determinado grupo de clientes poderá ser variável ao longo do tempo.

O modelo não considera diretamente as características dos clientes, como, no exemplo, a renda do indivíduo, ou o motivo da viagem. São definidas apenas as preferências dos grupos de clientes, e a frequência com que aparecem ao longo do tempo. A renda ou o motivo da viagem estarão presentes no modelo apenas de forma indireta, através desses parâmetros definidos.

A companhia aérea oferece diferentes tipos de passagens, com diferentes atributos, como classe de conforto (econômica, executiva, primeira classe), opção ou não de cancelamento (e o quanto do dinheiro é passível de devolução no caso do cancelamento), quantidade permitida de bagagem, entre outros. Do ponto de vista do modelo, os atributos em si não são considerados diretamente (de forma semelhante ao que ocorre com as características dos indivíduos). A disposição a pagar dos diversos grupos de clientes para cada tipo de passagem oferecida, bem como o custo marginal da passagem (que é incorrido somente se o assento for

ocupado, conforme discutido no capítulo 2.1) e a capacidade disponível (em quantidade de assentos) são os parâmetros do modelo. Como esses parâmetros são decorrentes dos atributos das passagens, os atributos são considerados de forma indireta. Assim, para que uma passagem de primeira classe seja modelada, basta colocar o custo marginal adequado para esse tipo de serviço, e definir a disposição a pagar dos clientes para essa passagem de maneira condizente à preferência dos indivíduos, e considerar um limite de capacidade mais limitado que os demais tipos de passagem, caso sejam oferecidos poucos assentos de primeira classe.

As passagens são vendidas durante um período de tempo, no qual os clientes vão aparecendo aos poucos, de maneira não totalmente previsível: as chegadas são variáveis aleatórias (condizente com o exposto no capítulo 2.4.1). A empresa aérea não tem como saber exatamente a quantidade de indivíduos que aparecerão dentro de um intervalo de tempo, e nem a qual grupo eles pertencerão. A companhia então oferece os diferentes tipos de passagens, com os diferentes preços, em função da percepção que ela tem da demanda e de qual é a estratégia ótima. O cliente escolhe a passagem que o melhor atende, em termos de benefícios e preço: ele escolherá aquela que proporciona o maior *payoff*, definido como o preço máximo que ele está disposto a pagar menos o preço oferecido pela companhia aérea, conforme proposto no capítulo 2.3.3. A receita da empresa é decorrente das vendas, e o custo do voo é função da quantidade e dos tipos de passagens vendidas. Dependendo da parametrização escolhida, o custo pode ser também definido como uma constante, isto é, invariável em relação a quantidade de assentos vendidos, conforme explicado no capítulo 2.1.

Ao final do período de vendas, uma determinada quantidade de cada tipo de passagem aérea terá sido vendida, e é possível calcular a receita e os custos. Também é possível saber qual foi o bem estar econômico gerado pela passagem, a partir dos dados das disposições a pagar dos clientes.

Apenas para a finalidade de estabelecer comparações, existe uma modalidade de estrutura ligeiramente diferente. É possível rodar o modelo de tal forma que primeiro seja gerada, de forma aleatória, todas as chegadas dos diversos tipos de clientes ao longo de todo o intervalo de tempo considerado, de acordo com suas taxas de chegada, para que depois a empresa decida para qual cliente vender, e por qual preço. Esse é uma estrutura utilizada somente para verificar qual seria o lucro da empresa caso ela pudesse prever perfeitamente a demanda, e soubesse em detalhes a disposição a pagar de todos os clientes. Nesse caso, o lucro seria o maior possível, e é usado como um limite superior para posteriores comparações.

Como os modelos apresentam comportamento probabilístico, e as variáveis de interesse (sejam o lucro, a receita, o custo, o bem estar econômico, a quantidade de compras de cada passagem, ou outras) são aleatórias, nem sempre as distribuições de probabilidade são facilmente obtidas. Para os casos mais simples, as distribuições foram calculadas de maneira analítica ou numérica. Para os cenários mais complexos, no qual um alto custo computacional seria requerido para um cálculo numérico, optou-se por fazer uso do método de Monte Carlo, conforme discutido no capítulo 2.4.2, com a finalidade de se obter as distribuições de probabilidade relevantes.

3.2 Estruturação formal

A estrutura formal do modelo foi construída com base na descrição do capítulo anterior.

G é o conjunto dos n diferentes grupos de clientes. P é o conjunto dos m diferentes tipos de passagens, ofertadas pela companhia aérea entre os instantes t_0 e t_f . Assim, estaremos interessados nos instantes t tais que $t_0 \leq t \leq t_f$.

CLIENTES

Cada grupo $i \in G$ de clientes possui uma disposição a pagar para cada um dos tipos de passagens $j \in P$, denotada por w_i^j . A disposição a pagar é uma função do tempo t , isto é, $w_i^j = f(i, j, t)$. O modelo pode assumir qualquer função desse tipo, de acordo com o cenário de interesse. Por simplicidade, nos cenários estudados, a disposição a pagar foi definida como uma constante ao longo do tempo, isto é, $w_i^j = \text{constante}_i^j$.

A chegada de potenciais clientes para pesquisa dos preços das passagens é um processo aleatório. A taxa esperada de clientes do tipo i por unidade de tempo, denominada λ_i , pode ou não ser constante ao longo do tempo ($\lambda_i = g(i, t)$), e reflete a taxa média esperada de clientes por unidade de tempo, mas não a taxa que necessariamente será observada, por causa da aleatoriedade. Ela segue a estrutura proposta no capítulo 2.4.1.

PASSAGENS

Para cada passagem $j \in P$ é definido o preço p_j , função também do tempo, isto é, $p_j = h(j, t)$. Quem define essa função é a companhia aérea, de acordo com a estratégia que ela julga mais adequada para aumento da lucratividade. Ela pode definir um preço constante e imutável, ou um preço que aumenta no decorrer do tempo, por exemplo.

A estratégia de preços ao longo do tempo pode ser previamente definida e nunca mais modificada, ou pode ser modificada ao longo do tempo, em função da quantidade de passagens da cada tipo já vendida, e do tempo restante até o voo. Esse tipo de estratégia mais complexa, que pode ser modificada ao longo do tempo, é modelada através de uma equação do tipo $p_j = h(j, t, q_1, q_2, \dots, q_m)$, na qual q_k denota a quantidade já vendida de passagens do tipo $k \in P$ no instante t . Assim, se, por exemplo, a quantidade de passagens vendidas de um determinado tipo for muito baixa e exista pouco tempo restante até o voo, o preço dessa passagem poderia ser reduzido. Caso a quantidade vendida de passagens desse tipo esteja dentro de um limite aceitável, o preço não precisaria ser reduzido. Essa estratégia é facilmente implementada com a função h adequada. Essa função h mais sofisticada é a utilizada pelo modelo.

A quantidade disponível de passagens do tipo j é função da quantidade já vendida de todos os tipos de passagens no instante t . Se q_k denota a quantidade já vendida de passagens do tipo $k \in P$, e d_j denota a quantidade ainda disponível de passagens do tipo $j \in P$, tem-se que $d_j = s(q_1, q_2, \dots, q_m, t)$.

Com essa estrutura, é possível criar as regras mais diversas para a quantidade disponível de passagens ao longo do tempo, que atendem casos reais. Por exemplo, se um voo possui todos os assentos iguais, com passagens que se diferenciam somente quanto à possibilidade de desistência e devolução do dinheiro, então tanto a venda de uma passagem do tipo 1 (sem possibilidade de desistência) quanto do tipo 2 (com possibilidade de desistência) resultam em um assento a menos de todos os disponíveis do avião. Supondo uma aeronave com 200 assentos, tem-se $d_1 = 200 - q_1 - q_2$ e $d_2 = 200 - q_1 - q_2$. Ou seja, ambos os tipos de passagem dividem os mesmos assentos.

Já em outro caso, no qual a aeronave possui 20 assentos a mais com poltronas maiores, exclusivos da primeira classe, a disponibilidade de assentos de primeira classe depende apenas da quantidade de passagens de primeira classe (tipo 3) vendidas: $d_3 = 20 - q_3$. Ou seja, independentemente da quantidade vendida de outras passagens, sempre existirão 20 poltronas reservadas somente para a primeira classe. Porém, caso falem poucos dias para o voo, e ainda existam muitas poltronas de primeira classe desocupadas, a empresa pode desejar executar a estratégia de vender essas poltronas para qualquer potencial cliente, com qualquer tipo de passagem. Assim, a partir de certo instante limite t_L , a disponibilidade das passagens 1 e 2 mudariam para $d_1 = d_2 = 220 - q_1 - q_2 - q_3$. Ou seja, a partir de t_L , todos os 3 tipos de

passagem dividem as 220 poltronas, e, para a passagem do tipo 3, continuam sendo oferecidas somente 20 poltronas, mas que podem ser ocupadas por passageiros de outras classes de conforto. Com a função z proposta, regras mais complexas de disponibilidade de poltronas podem ser criadas em função do problema a ser modelado.

O custo C do voo é dado como uma função da quantidade de passagens vendidas, isto é, $C = u(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Em um dos casos mais simples,

$$C = C_0 + \sum_{j \in P} c_j q_j$$

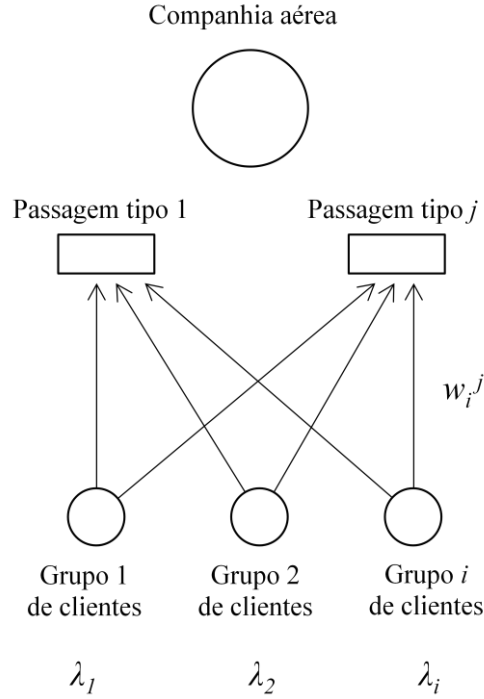
Nessa equação, C_0 representa o custo fixo da aeronave, que independe da quantidade de passagens vendidas, que está de acordo com o conceito da soma do custo marginal de capacidade discutido no capítulo 2.1.1. As constantes c_j são o custo unitário da passagem do tipo j , ou o chamado custo marginal, que é incorrido somente quando o assento é ocupado. Conforme já discutido no mesmo capítulo, por simplificação, esse custo marginal pode ou não ser definido como zero. Observe que, se o custo do voo for fixo, sem a parcela variável, maximizar a receita corresponde a maximizar o lucro.

RELAÇÃO ENTRE CLIENTES E PASSAGENS

O *payoff* v_i^j do cliente do grupo i em relação à passagem do tipo j é a diferença entre o quanto ele está disposto a pagar e o preço da passagem. Isto é, $v_i^j = w_i^j - p_j$, e, portanto, é função do tempo. *Payoffs* positivos significam que o preço da passagem é inferior ao quanto o cliente está disposto a pagar por ela.

É justamente o *payoff* que definirá se o cliente tem interesse ou não na passagem. Os indivíduos buscarão comprar as passagens de maior *payoff*, se elas estiverem disponíveis. Caso o *payoff* seja negativo, o cliente não desejará comprar a passagem.

Foi definido que o cliente comprará a passagem se o *payoff* for maior ou igual a zero. Isto é, quando o *payoff* for nulo, o cliente ainda assim desejará comprar a passagem. Essa definição visa eliminar o estado de indiferença em relação à compra.

Figura 1: Esquematização da estrutura do modelo**RESUMO DA ESTRUTURA DO MODELO**

Os principais elementos do modelo são resumidos a seguir. O intervalo de tempo considerado, a quantidade de tipos de passagens e de grupos de clientes, bem como as funções f , g , h , s e u são os parâmetros do modelo.

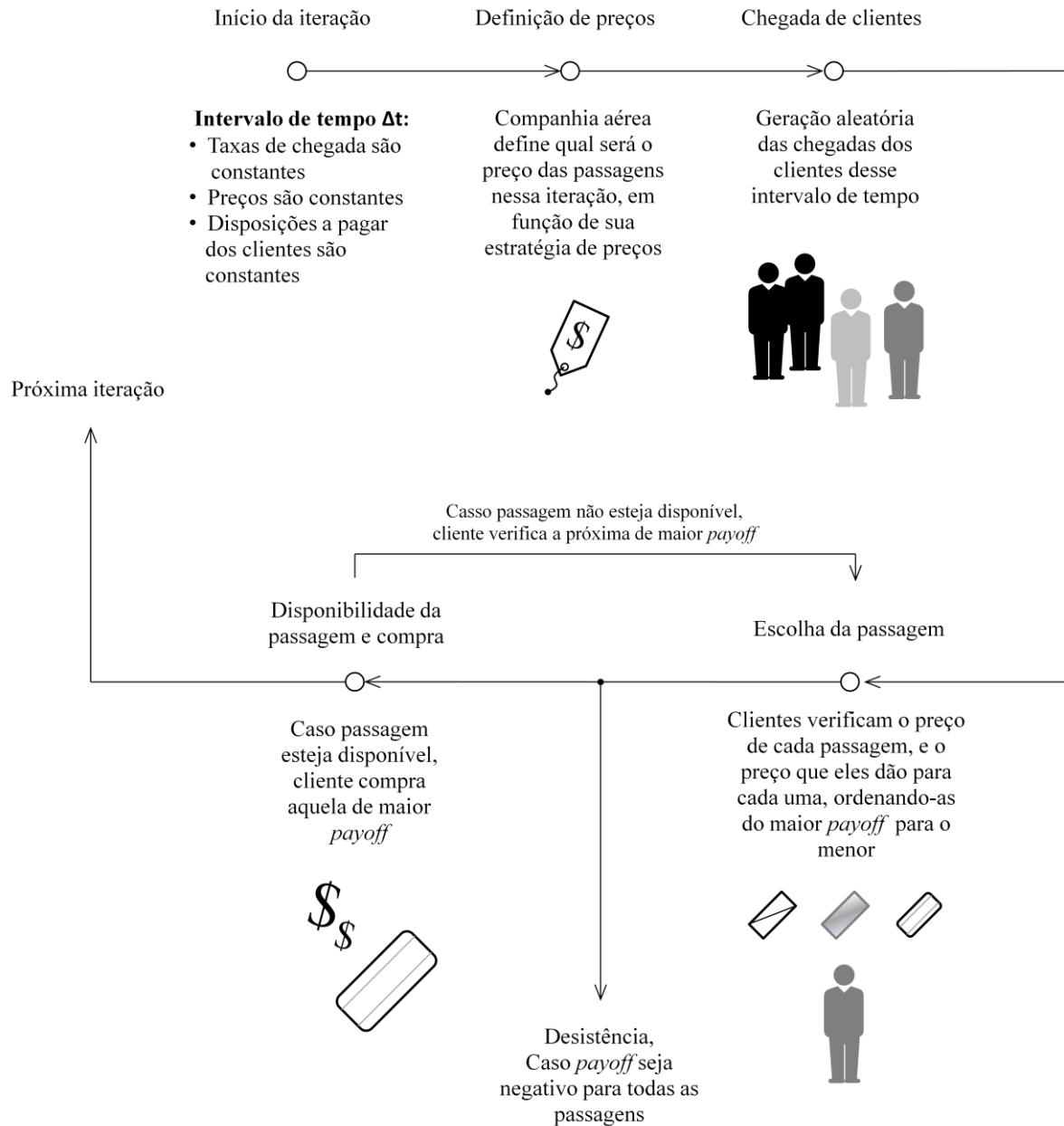
- G = Conjunto dos n diferentes grupos de clientes.
- P = Conjunto dos m diferentes tipos de passagens.
- t = Instante do tempo, no qual $t_0 \leq t \leq t_f$
- $w_i^j = f(i, j, t)$ = Disposição a pagar do cliente do grupo $i \in G$ em relação à passagem do tipo $j \in P$ no instante t .
- $\lambda_i = g(i, t)$ = Taxa de chegada de clientes do grupo $i \in G$ por unidade de tempo, no instante t .
- q_j = Quantidade de passagens do tipo $j \in P$ compradas até um determinado momento.
- $p_j = h(j, t, q_1, q_2, \dots, q_m)$ = Preço da passagem $j \in P$ no instante t .
- $d_j = s(q_1, q_2, \dots, q_m, t)$ = Quantidade de passagens do tipo $j \in P$ ainda disponíveis para venda no instante t .
- $C = u(q_1, q_2, \dots, q_n)$ = Custo do voo.

- $v_i^j = w_i^j - p_j = \text{Payoff}$ do cliente do grupo $i \in G$ em relação à passagem do tipo $j \in P$ no instante t .

ITERAÇÕES DO MODELO

O diagrama a seguir mostra como se desenvolvem as iterações do modelo.

Figura 2: Diagrama do modelo



O intervalo de tempo entre t_0 e t_f é segmentado em N partes de tamanho igual a $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$.

O Δt é uma aproximação numérica de um intervalo infinitesimal de tempo. A simulação é

realizada ao longo do tempo para cada um desses segmentos, com início na iteração $k = 1$ (que corresponde a $t = t_0$) e fim na iteração $k = N$ (que corresponde a $t = t_f - \Delta t$). O instante de tempo correspondente a iteração k será denotado de t_k , no qual $t_k = t_0 + (k - 1)\Delta t$. O instante t_0 é o início das vendas, no qual nenhuma passagem ainda foi vendida, isto é, q_1, q_2, \dots, q_m têm valor zero.

Define-se que a taxa de chegada de cada um dos grupos i é constante durante esse pequeno intervalo de tempo Δt , com $\lambda_i = g(i, t_k)$, conforme proposto no capítulo 2.4.1. O preço de cada passagem j e a disposição a pagar dos clientes também serão constantes durante esse intervalo de tempo, e corresponderão respectivamente a $p_j = h(j, t_k, q_1, q_2, \dots, q_m)$ e $w_i^j = f(i, j, t_k)$. Isto é, essas 3 características são constantes dentro de uma mesma iteração (definidas a partir do t_k), mas variam de iteração para iteração.

As variáveis aleatórias que correspondem às quantidades de clientes de cada um dos n grupos são geradas, em função dos parâmetros λ_i . Essa variável aleatória segue uma distribuição de Poisson dentro do intervalo de tempo Δt . Como o intervalo de tempo da iteração é pequeno, a probabilidade de ocorrência de uma chega de um cliente é bastante reduzida, mas eventualmente elas ocorrem.

Caso algum cliente apareça nessa iteração, ele busca comprar a passagem que lhe proporciona maior *payoff*, e que está disponível para venda. A disponibilidade da passagem j é calculada como $d_j = s(q_1, q_2, \dots, q_m, t_k)$. Caso a passagem não esteja disponível para venda, o cliente parte para aquela de segundo maior *payoff*, e assim por diante, até chegar em uma passagem que proporcione *payoff* negativo. Caso nenhuma passagem que ofereça *payoff* positivo esteja disponível, então o cliente não comprará nenhuma passagem nesse intervalo de tempo. Caso contrário, ele comprará a passagem e pagará o preço disponível no instante da iteração, gerando receita para a companhia aérea. Se mais de um cliente chegar para compra em uma mesma iteração, a ordem de quem compra primeiro é definida aleatoriamente. Nesse momento, a quantidade de cada passagem vendida até o instante considerado (definido pelas variáveis q_1, q_2, \dots, q_m) é atualizada. São registradas quais passagens foram vendidas e por qual preço, e qual era a disposição a pagar do cliente naquele instante, que são variáveis utilizadas posteriormente para análises.

As interações prosseguem, de Δt em Δt , e passagens são vendidas, e as taxas de chegada, preços e disposições a pagar vão se modificando, até que o período de vendas seja encerrado.

Apura-se então a receita total obtida pela companhia aérea, que é a soma de todas as receitas geradas pelas vendas individuais. Deduzindo-se o custo, obtém-se o lucro da empresa. É possível também observar quantos clientes de cada tipo apareceram para uma potencial compra, quantos foram atendidos e quantos não foram atendidos, quais tipos de passagens eles escolheram, e qual foi o *payoff* de cada um.

SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO

Observe que a quantidade de clientes que aparecem e o momento em que aparecem são aleatórios, conforme discutido no capítulo 2.4. Portanto, a cada vez que uma simulação for rodada, mesmo que tenha os exatos mesmos parâmetros, espera-se diferentes aparecimentos de clientes, em diferentes instantes. Como as vendas, a receita, o custo, o lucro e o bem estar econômico são decorrentes da quantidade de clientes que apareceram e do momento que apareceram, essas variáveis também serão aleatórias. Elas obedecerão a alguma distribuição de probabilidades.

Em alguns casos, é possível calcular, de maneira analítica ou numérica, qual é a distribuição de probabilidades esperada para os diversos resultados. Em outros, a solução é extremamente complexa, e optou-se por fazer uso do método de simulações de Monte Carlo, conforme explicado no capítulo 2.4.2.

A ESTRATÉGIA DE MAIOR LUCRO

Para complementar a comparação entre alternativas de estratégia, buscou-se entender qual seria o maior lucro possível da empresa se ela pudesse saber exatamente quantos clientes apareceriam em uma determinada simulação, em qual instante, e quanto eles estariam dispostos a pagar por cada tipo de passagem.

Nesse cenário, a companhia aérea sabe, de maneira certa, quais e quantos são os clientes que vão gerar mais lucro, e pode ofertar o preço máximo que eles estão dispostos a pagar. Dessa forma, ela não estaria sujeita a vender muitas passagens para clientes que oferecem um baixo lucro, ou a deixar capacidade ociosa por causa da demanda incerta, conforme discutido no capítulo 2.1.1, e não cobraria preços baixos, inferiores ao que os clientes estão dispostos a pagar. Seu lucro seria o maior possível.

Essa situação oferece uma mudança na simulação do modelo. As iterações ocorrem exatamente da mesma maneira, com a diferença de que as vendas não são realizadas. A simulação é realizada somente para que sejam guardados os aparecimentos dos clientes, com o tipo de cliente que apareceu, o instante, e as disposições a pagar dele naquele instante. Em

um momento posterior, após a iteração, calcula-se qual passagem deve ser vendida para cada um dos indivíduos dessa lista de clientes (e quais não devem ser atendidos) para que o lucro seja maximizado. Esse cálculo é simples: a empresa vende em primeiro lugar as passagens que geram maior lucro, e, caso ainda existam assentos vazios, ela vende aquelas opções que geram o segundo maior lucro, e assim por diante. Com essa estrutura, é como se a empresa já tivesse uma lista de quais seriam os clientes da simulação considerada, e já sabe quando e por quanto vender cada tipo de passagem.

Observe que, mesmo o lucro atingindo o seu máximo possível, ainda assim ele é aleatório, já que o aparecimento de clientes em cada simulação é também aleatório. Por isso, também é necessário fazer uso de simulações de Monte Carlo para avaliação dos resultados desse cenário. A diferença é que a empresa sabe quantos e quando os aparecimentos da simulação se realizarão, e se aproveita dessas informações para maximizar o lucro daquela simulação.

BEM ESTAR ECONÔMICO

Além do lucro da companhia aérea, deseja-se estudar o bem estar econômico gerado por cada estratégia de preços.

Conforme discutido no capítulo 2.3.3, o bem estar econômico será definido pela soma do lucro da companhia aérea com o *payoff* total dos clientes que compraram as passagens. Em alguns casos, quando maximizar a receita corresponde a maximizar o lucro (que ocorre quando de existirem apenas custos fixos, conforme já mencionado), o lucro não será calculado diretamente. Nesses casos, o bem estar econômico será a soma da receita da empresa e do *payoff* dos clientes. O custo não entrará no cálculo, mas isso não vai alterar a comparação relativa entre as diversas estratégias quanto ao bem estar econômico que proporcionam, já que o custo é uma constante nessas situações.

CENÁRIOS

Para mostrar mais detalhes sobre o modelo, três cenários ilustrativos preliminares foram construídos, e são discutidos a seguir.

3.2.1 Cenário preliminar 1

O cenário mais simples possível para o modelo é aquele com um único tipo de comprador, com taxa de chegada e utilidade constantes ao longo do tempo, e um único tipo de passagem. Apesar de não ter proximidade com a realidade, ele é útil como exemplo ilustrativo para que o funcionamento do modelo seja explicado em mais detalhes.

Nesse cenário exemplo, a taxa de chegada do único tipo de cliente foi fixada em 10 clientes por semana. Essa taxa reflete a quantidade média esperada de clientes que chegam em uma unidade de tempo. Porém, o aparecimento de clientes na realidade é um processo aleatório, e existe a possibilidade de chegarem mais ou menos clientes do que a média esperada, de acordo com uma distribuição de probabilidades (no caso, a distribuição de Poisson, conforme discutido no capítulo 2.4.1). Os gráficos 5 e 6 mostram a distribuição de probabilidades da quantidade de clientes que chegam dentro de um determinado intervalo de tempo de respectivamente 1 semana e 12 semanas. No primeiro caso (1 semana de intervalo de tempo), a quantidade esperada de clientes é 10, e, no segundo caso, é $10 \frac{\text{clientes}}{\text{semana}} \times 12 \text{ semanas} = 120$.

Gráfico 5: Distribuição das probabilidades da chegada de clientes em uma semana, com taxa de chegada $\lambda = 10$ clientes/semana

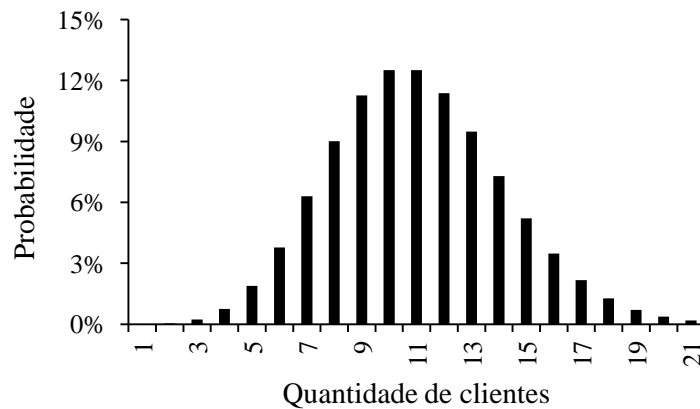
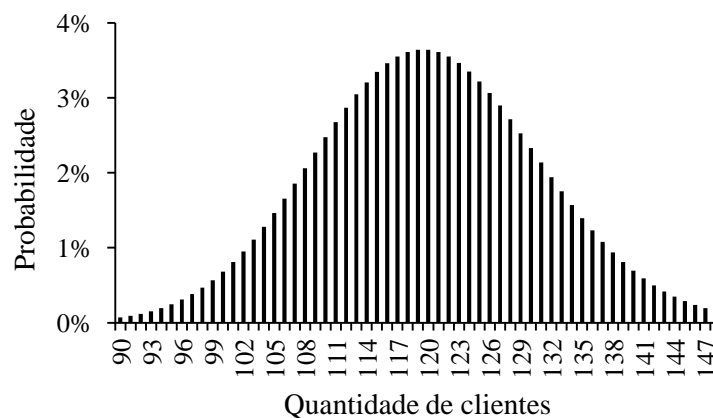


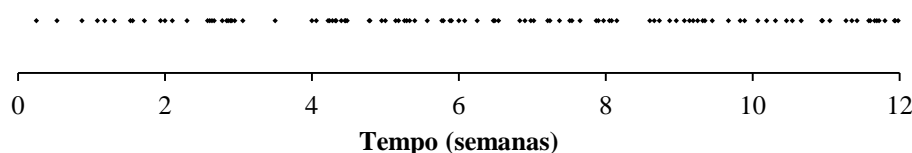
Gráfico 6: Distribuição das probabilidades da chegada de clientes em doze semanas, com taxa de chegada $\lambda = 10$ clientes/semana



Supondo que a aeronave tem, por exemplo, 110 assentos, existe aproximadamente 16,9% de chance de 1 ou mais assentos não serem ocupados até o final das 12 semanas, mesmo que a taxa esperada de clientes seja de 120 nesse período.

O gráfico 7 mostra o exemplo de uma simulação do aparecimento de clientes no prazo de 12 semanas, com a taxa de 10 chegadas por semana. Nessa simulação específica, 109 clientes apareceram. Observe como a densidade de clientes, apesar de ter comportamento aleatório, é constante ao longo do tempo. Não há concentração de clientes em períodos específicos, já que a taxa de chegada foi definida como constante ao longo do tempo.

Gráfico 7: Simulação da chegada de clientes: cada ponto é um cliente que apareceu para possível compra de passagens para o voo



No cenário proposto, se o preço da passagem for maior que o preço máximo que o cliente está disposto a pagar, a compra não será realizada. Se, no nosso exemplo, a disposição a pagar do cliente é constante com o tempo e igual a R\$ 300,00, a passagem deve ter um preço igual ou inferior a esse para ser vendida. Caso contrário, nenhuma venda será realizada. Nesse cenário em específico, o melhor resultado que a companhia aérea poderia obter seria oferecer um preço exatamente igual a R\$ 300,00 constantemente ao longo do tempo, para que todos os clientes que chegassem comprassem a passagem pelo preço máximo que estão dispostos a pagar.

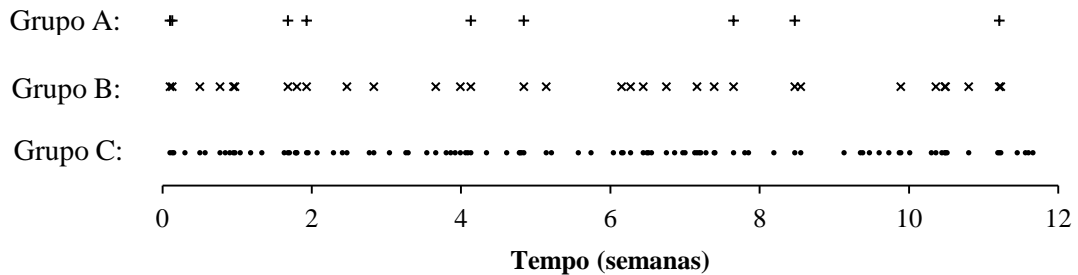
Como nesse exemplo simplificado existe apenas um tipo de cliente, de nada adiantaria baixar os preços das passagens para que mais clientes sejam atendidos, pois não há mais clientes. Já o cenário a seguir apresenta mais tipos de clientes, e, nesse caso, essa estratégia poderia ser executada.

3.2.2 Cenário preliminar 2

Nesse segundo cenário ilustrativo, existem três tipos de clientes, todos com taxas de chegada e utilidades constantes ao longo do tempo, porém com valores diferentes. Os tipos são: o cliente A, que está disposto a pagar mais pela passagem (R\$ 500), mas que possui a menor taxa de chegada; o cliente B, que está disposto a pagar um preço intermediário (R\$ 450), com taxa de chegada também intermediária, e o cliente C, que está disposto a pagar o menor preço

(R\$ 400), mas com alta taxa de chegada. O gráfico 8 mostra uma simulação com a chegada desses três tipos de clientes. Nessa simulação apareceram 9 clientes do tipo A, 32 do tipo B e 98 do tipo C. Os valores esperados eram respectivamente 10, 30 e 100 clientes em 12 semanas.

Gráfico 8: Simulação com chegada de clientes dos três tipos especificados, que são constantes ao longo do tempo, mas possuem valores diferentes



Nesse caso, se a empresa aérea ofertar um preço constante maior que R\$ 450 e menor ou igual a R\$ 500, todos os (9) clientes do tipo A serão atendidos, e nenhum cliente do tipo B e C serão. Se o preço for menor ou igual a R\$ 450, mas maior que R\$ 400, todos os clientes do tipo A e B serão atendidos (41 clientes no total). Se o preço for menor ou igual a R\$ 400, todos os clientes serão atendidos (139 no total).

Se a empresa aérea deseja vender rapidamente a maior quantidade de passagens, ela deveria definir o preço da passagem em R\$ 400. Assim, ela lucraria o máximo com os clientes do tipo C (pois esse preço está no limite máximo possível que ainda é aceitável para esse tipo de cliente), e venderia também para os outros dois tipos de clientes.

Caso exista oferta em excesso, a companhia poderia ofertar R\$ 500 pela passagem, vendendo apenas para os clientes tipo A. Caso exista muito pouco tempo restante até o voo, e ainda existam assentos vazios, a empresa poderia abaixar o preço para R\$ 400, na tentativa de conseguir vender a passagem para qualquer cliente que aparecesse nos últimos instantes.

Observe que, para a companhia aérea, o ideal seria cobrar de cada cliente individualmente o máximo possível que ele estaria disposto a pagar. Se ela pudesse cobrar exatamente esse valor, e não mais (pois isso faria com que o cliente desistisse da compra) e nem menos (pois parte do lucro seria perdida), seu lucro seria maximizado. Isto seria equivalente a oferecer o preço de R\$ 500 quando o cliente for do tipo A, R\$ 450 quando for do tipo B, e R\$ 400 quando for do tipo C. Na prática, a companhia não conseguirá saber qual é a disposição a pagar de cada um de seus clientes, e essa situação teórica não é possível. Uma maneira de se

aproximar desse cenário ideal é oferecer diferentes tipos de passagens de maneira a separar esses 3 públicos, e cobrar um preço maior para passagens destinadas ao público A e um preço menor para passagens destinadas ao público C.

Como a quantidade de assentos no voo é limitada, o ideal seria preencher primeiro os assentos com o público que está disposto a pagar o preço mais alto, que, no caso, é o A. Caso sobrem assentos, deve-se preencher os assentos vazios com clientes do tipo B, pois eles pagam a segunda maior escala de preços. Caso ainda assim sobrem assentos, deve-se preenchê-los com clientes do tipo C. Deve-se sempre evitar voar com assentos vazios, pois eles são usualmente um custo fixo para a empresa. É sempre melhor ter algum cliente pagando pelo assento, por menor que seja o preço, do que não ter ninguém pagando por seu uso (preço zero).

Porém, como o aparecimento de clientes é um processo aleatório, não se sabe exatamente a quantidade de clientes e sua ordem de chegada, e a estratégia para preenchimento de assentos não é tão simples quanto a exposta. Conforme já discutido, por causa da incerteza de aparecimento de clientes, a companhia poderá vender em excesso passagens para os clientes C, que estão dispostos a pagar menos, e, no momento que aparecem clientes do tipo A, não existirem mais assentos. Ou ela pode vender assentos de menos para os clientes C, resultando em voos com assentos vazios.

Além disso, na realidade, não existem apenas 3 tipos de clientes, com 3 patamares de preços, mas uma infinidade contínua de preços. Esses patamares são um tipo de simplificação inerente ao modelo proposto.

3.2.3 Cenário preliminar 3

São definidos três diferentes grupos de clientes, com diferentes taxas de chegada ao longo do tempo. Um dos tipos possui taxa constante, outro possui taxa decrescente, e o último possui uma taxa com um máximo em um instante intermediário entre o início e o fim da venda das passagens. Esse cenário é apenas um exemplo de como poderiam ser definidas curvas de taxas de chegada.

As diferentes curvas dessas taxas bem como uma simulação de chegada de clientes são mostradas nos gráficos 9 e 10. A equação para as taxas de chegada λ_i de clientes por semana do grupo i , nesse exemplo, são:

- $\lambda_1 = 2,5$ (função independente do instante do tempo);
- $\lambda_2 = 25,18 \cdot (t + 1)^{-1,7}$ (função decrescente com o tempo);

- $\lambda_3 = 16,6 \cdot (t/4,5)^{1,5} e^{-(t/4,5)^{2,5}}$ (função que apresenta um máximo).

Gráfico 9: Curvas das taxas de chegada ao longo do tempo para os diferentes grupos de clientes

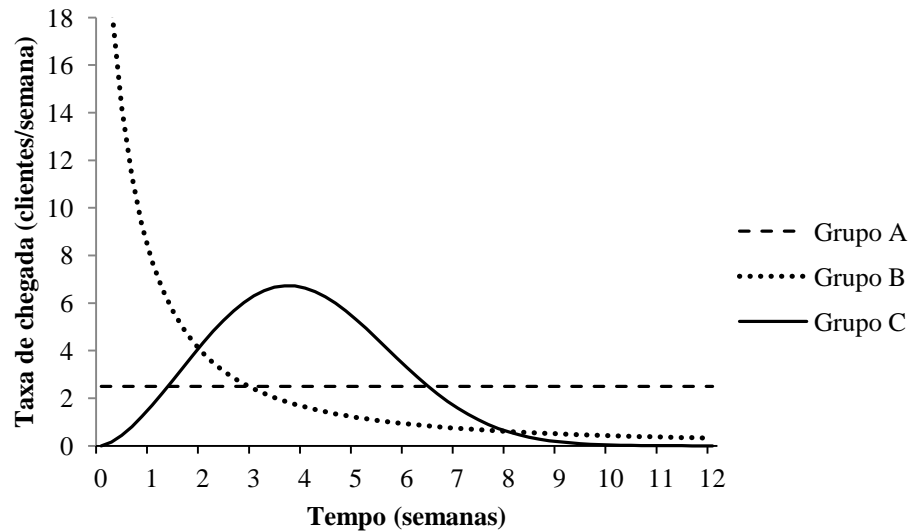
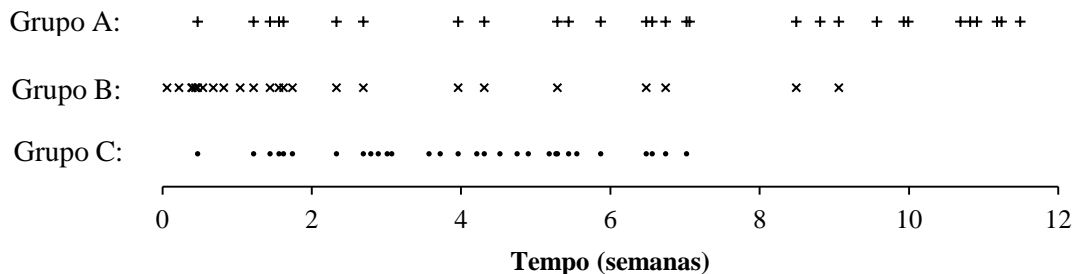


Gráfico 10: Simulação com chegada de clientes dos três tipos especificados, de acordo com as curvas mostradas no gráfico 9



É possível observar que a chegada de clientes do grupo A é relativamente constante ao longo do tempo, diferentemente do que ocorre nos demais grupos. No caso dos clientes do grupo B, há uma concentração maior no início. Para clientes do grupo C, existe uma concentração dentro de um determinado período intermediário entre o início e o término das vendas de passagens.

O modelo permite que qualquer taxa de chegada ao longo do tempo seja especificada.

4 ANÁLISE DO MODELO PROPOSTO

A seguir, são estudadas as diversas possíveis estratégias de uma empresa aérea dentro de cenários estabelecidos, que tentam traduzir os diversos comportamentos possíveis dos clientes e das características dos tipos de passagens oferecidas por companhias aéreas.

O primeiro modelo especificado visa estudar a diferenciação de preços entre clientes a qualquer instante de tempo. O modelo de número 2 foi elaborado com a finalidade do estudo da diferenciação de preços ao longo do tempo. Em ambos, existe uma estratégia referencial, que é teórica e representa o lucro máximo possível de ser alcançado, e outras estratégias que são comparadas para análise.

4.1 Modelo 1

São considerados três diferentes grupos de clientes, e dois tipos de passagens oferecidas. Os custos fixos não são considerados, pois não alteram a estratégia em relação ao lucro ótimo. Apenas a receita e o custo variável serão considerados no lucro, por variarem em função da alternativa escolhida. Além disso, todas as estratégias de preço analisadas nesse modelo específico serão fornecer um preço constante ao longo do tempo para cada uma das duas passagens, com exceção da alternativa 0, conforme será discutido.

A passagem 1 contempla serviços de maior qualidade, e possui custo unitário mais alto para a companhia aérea. Esse é o custo marginal já discutido, que é incorrido somente quando um assento é ocupado. A passagem 2 oferece menos vantagens para os clientes, mas possui custo unitário menor para a empresa.

São oferecidos 100 assentos para o voo em questão. Cada assento pode ser vendido para ambos os tipos de passagens. Ou seja, as duas passagens dividem as mesmas poltronas, e, por isso, a soma da quantidade vendida de passagens do tipo 1 com as passagens do tipo 2 deverá ser necessariamente inferior ou igual a 100 unidades.

Todos os três grupos de clientes estão dispostos a pagar mais pela passagem 1 do que pela passagem 2. Porém, o cliente A está disposto a pagar mais por ambas, o cliente B está disposto a pagar um preço intermediário, e o cliente C está disposto a pagar a menor quantia. Por simplificação, as taxas de chegada dos três clientes são constantes. O cliente A possui a menor taxa de chegada, e o cliente C a maior. As utilidades (disposições a pagar) são constantes ao longo do tempo para os três grupos, também por simplicidade.

As tabelas 1 e 2 mostram as características dos clientes e das passagens.

Tabela 1: Características dos clientes

Cliente	Disposição a pagar para passagem 1	Disposição a pagar para passagem 2	Taxa de chegada (clientes/semana)	Quantidade média de clientes em 12 semanas
A	R\$ 750,00	R\$ 400,00	4,2	50
B	R\$ 380,00	R\$ 300,00	5,0	60
C	R\$ 290,00	R\$ 260,00	4,8	70

Tabela 2: Características das passagens

Passagem	Custo unitário	Preços			
		Estratégia 1	Estratégia 2	Estratégia 3	Estratégia 4
1	R\$ 120,00	R\$ 290,00	R\$ 340,00	R\$ 380,00	R\$ 650,00
2	R\$ 100,00	-	R\$ 260,00	-	R\$ 300,00

Observe que a soma esperada de todos os tipos de clientes é de $50 + 60 + 70 = 180$ indivíduos. Como a chegada é um processo aleatório, as quantidades observadas em cada simulação não serão exatamente essas, mas serão próximas. Como já mencionado, nesse exemplo, os preços, taxas de chegada e disposições a pagar são constantes.

4.1.1 Lucro máximo

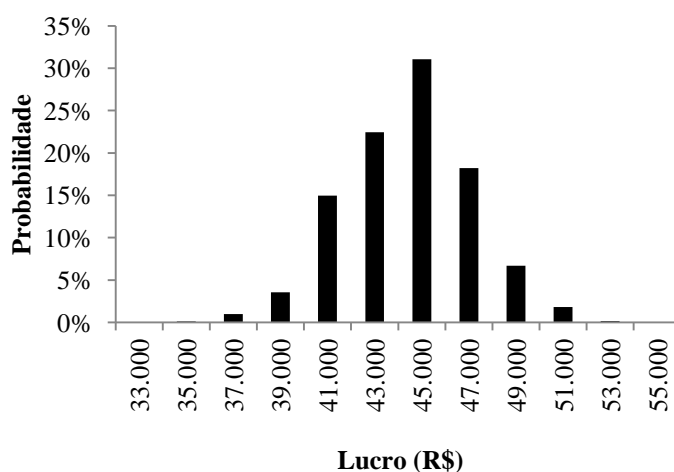
O lucro mais alto possível seria alcançado no caso da companhia aérea limitar as vendas apenas para os clientes do tipo A (oferecendo um preço de R\$ 750,00, que não seria atrativo para nenhum outro cliente além do A), e no caso específico em que 100 clientes ou mais aparecem, que é uma altamente improvável ($10^{-12}\%$ de probabilidade), dada a taxa média de 50 clientes. Nesse caso, o lucro seria de R\$ 63.000.

4.1.2 Estratégia 0

Caso fosse possível conhecer o quanto cada cliente está disposto a pagar por cada passagem, e viável para a companhia aérea cobrar um preço exatamente igual (ou ligeiramente inferior) à essa quantia, a diferenciação do tipo 1 seria alcançada. Além disso, se a empresa pudesse primeiro vender todas as passagens para os clientes de maior rentabilidade (grupo A), depois para os clientes de segunda maior rentabilidade (grupo B) e, por último, para os de menor

rentabilidade (C), o lucro seria o maior possível para a empresa. Ela venderia somente passagens do tipo 1 para todos os clientes (pois é a passagem que possui, para todos os clientes, o maior lucro unitário, que é o preço menos o custo unitário), pelo preço exato que eles estão dispostos a pagar. Essa seria a chamada “estratégia 0”, que serve de parâmetro de comparação para as demais. Nesse caso, o *payoff* para os clientes é sempre zero, o menor possível, já que os clientes pagaram exatamente o limite que estão dispostos a pagar. O gráfico 11 mostra a distribuição de probabilidades do lucro da empresa com essa estratégia, construído a partir do método de Monte Carlo com 2.000 simulações.

Gráfico 11: Distribuição de probabilidades do lucro da companhia aérea com a estratégia 0



O lucro médio obtido com a estratégia 0 foi de R\$ 44.423,42, que representa 70,5% do teto máximo teórico (R\$ 63.000,00). O *payoff* para os clientes é nulo, sempre. Portanto, a soma do *payoff* total com o lucro total é igual ao próprio lucro total. Essa soma é uma medida do bem estar econômico de todos os envolvidos (clientes e a companhia). A estratégia 0 atinge o bem estar econômico máximo, mas toda a utilidade está concentrada nas mãos da companhia aérea, e nenhuma nas mãos dos clientes.

4.1.3 Estratégia 1

A estratégia 1 consiste na venda de um único tipo de passagem, acessível para todos os clientes. O preço dessa passagem será constante ao longo do tempo. Observe que como só há um tipo de passagem, não há diferentes opções de compra para os clientes, e não são propostos diferentes preços, e, portanto, não há diferenciação de preços. A passagem é um produto ofertado pelo exato mesmo preço para todo e qualquer cliente.

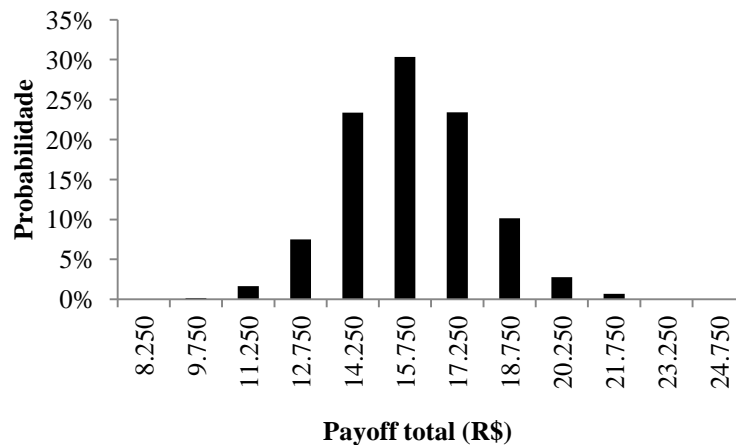
Observe que, como passagens serão ofertadas por preços atrativos para todos os clientes, e são esperados 180 clientes na média, a probabilidade de que os 100 assentos sejam ocupados é altíssima. A probabilidade das 100 poltronas não serem ocupadas é inferior a 0,00001%. Como existe demanda em excesso, é de se esperar que, em todas as simulações, sejam vendidas 100 unidades. Esse não seria o caso se o preço fosse aumentado, eliminando o interesse dos clientes C. Nesse caso, existiria uma probabilidade muito maior de desocupação.

Se a empresa deseja vender apenas um tipo de passagem, acessível para todos os clientes, ela tem apenas duas opções: ou vender somente passagens do tipo 1 por R\$ 290,00, ou vender somente a passagem do tipo 2 por R\$ 260,00. Com esses preços, o cliente C terá *payoff* nulo, e os demais clientes terão um *payoff* positivo, e desejaram comprá-las.

Qual das duas opções é mais interessante para a empresa aérea (venda da passagem do tipo 1 ou do tipo 2)? Aquela que envolve passagem 1. Isso ocorre porque o lucro unitário (preço – custo unitário) da passagem 1 é superior ao da passagem 2. O resultado final será um lucro unitário de R\$ 170,00 (o preço menos o custo unitário da passagem 1), e 100 unidades vendidas, resultando em um lucro de R\$ 17.000,00 com o voo. Como a probabilidade de menos de 100 clientes aparecerem para compra é extremamente pequena, ela será considerada desprezível, e o lucro terá sempre esse mesmo valor.

Esse lucro corresponde a 38,3% do lucro médio da estratégia 0.

O *payoff* dos clientes não é determinístico, e depende da distribuição dos 100 clientes que compraram as 100 passagens disponíveis. Clientes do tipo A possuem um alto *payoff* para cada passagem (de R\$ 490,00). Clientes do tipo B possuem um *payoff* intermediário (R\$ 120,00), e clientes do tipo C possuem *payoff* nulo. Assim, em simulações nas quais ocorrem muitas compras por clientes do tipo A, o *payoff* total dos clientes é superior a simulações em que resultam em muitas compras de clientes C. A média do *payoff* total para uma simulação de 2.000 iterações foi de R\$ 15.900,45, e a distribuição de probabilidades é mostrada no gráfico 12.

Gráfico 12: Distribuição de probabilidades do *payoff* total dos clientes, sob a estratégia 1

O bom estar econômico total, que é medido pelo lucro total mais o *payoff* total, segue a mesma distribuição de probabilidades do gráfico 12, porém com valores alterados: deve-se somar a quantia de R\$ 17.000,00 nos valores do eixo x. Isso é consequência do lucro ser uma constante com esse valor. A média desse bem estar é de R\$ 32.900,45.

4.1.4 Estratégia 2

Essa estratégia se propõe a fazer uso dos dois tipos de passagens existentes de modo a diferenciar os clientes do tipo C dos demais. Ou seja, deseja-se realizar uma diferenciação de preços objetivando o aumento dos lucros. Como a empresa não sabe a princípio quem é o cliente C, ela não pode oferecer um preço distinto a ela diretamente. Ela deve oferecer opções aos diversos clientes, que escolherão a melhor alternativa para si próprios, se dividindo então entre os diferentes grupos de clientes. Essa é a diferenciação de segundo grau, mencionada no capítulo 2.1.2.

Nessa estratégia, optou-se por oferecer a passagem de menor custo (tipo 2) pelo preço de R\$ 260,00. Esse é o preço máximo que o cliente C está disposto a pagar por essa passagem. Além disso, a passagem do tipo 1 será oferecida por um preço superior a R\$ 290,00, fazendo com que o cliente C não possua interesse em comprá-la, pois estará além do que ele está disposto a pagar. Ou seja, o *payoff* do cliente C com a passagem 2 será nulo. Essa é a passagem destinada para o cliente C.

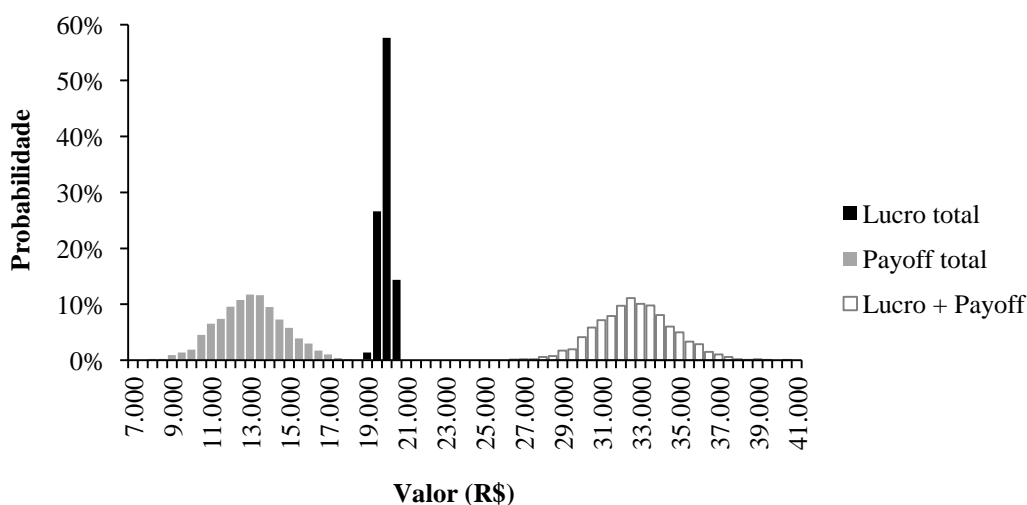
Os demais clientes (A e B) deverão obter um *payoff* maior com a passagem 1 do que com a passagem 2, para que tenham interesse em comprar a primeira opção, e nunca a segunda. O preço máximo da passagem 2 que ainda a deixa interessante para esses dois clientes é R\$ 340,00. O *payoff* para o cliente do tipo B nesse caso é de R\$ 40,00, o mesmo que teria com a

passagem 2 com o preço fixado conforme o parágrafo anterior (R\$ 260,00). Ou seja, o cliente B ficará indeciso quanto ambas as passagens, pois ambas oferecem exatamente a mesma vantagem em termos de *payoff*. A passagem 1 nesse caso é oferecida por apenas alguns centavos a menos que R\$ 340, sendo assim a mais interessante para o cliente B. Para o cliente A, o *payoff* é de R\$ 410,00, bastante superior ao *payoff* que consegue com a passagem 2 (R\$ 140,00). Ou seja, os clientes A e B terão mais interesse nessa passagem, a do tipo 1.

A empresa oferece a opção para todos os clientes que chegam, que escolhem a passagem mais adequada quanto suas preferências. Cada cliente do tipo A e B comprará a passagem 1, resultando em um lucro unitário de R\$ 220. Já os clientes do tipo C comprarão a passagem do tipo 2, resultando em um lucro unitário de R\$ 160,00. Observe que o lucro unitário da estratégia 1 era sempre de R\$ 170,00 por passagem, igual para todos os clientes. Nessa estratégia 2, o lucro gerado por clientes A e B é superior a essa quantia, e o lucro gerado pelo cliente C é inferior. O lucro unitário médio dependerá da quantidade de clientes de cada tipo que aparecerão. Se uma quantia muito grande de clientes do tipo C aparecer para compra, o lucro unitário médio será inferior aos R\$ 170,00, e essa estratégia provavelmente será menos interessante que a 1. Caso existam clientes o suficiente do tipo A e B, o lucro unitário médio será superior a R\$ 170,00, tornando a estratégia 2 superior.

As distribuições do lucro, do *payoff* total, e do bem estar econômico total (soma do lucro com o *payoff*) são mostrados no gráfico 13.

Gráfico 13: Distribuição de probabilidades do lucro, *payoff* e a soma de ambos para a estratégia 2



Ao contrário das outras estratégias, a estratégia 2 inclui vendas da passagem 2. Essa passagem possui custo inferior ao do outro tipo, o que contribui para aumento do lucro. Porém, a diminuição do custo não compensa a diminuição da utilidade que todos os clientes dão a ela, e, por isso, espera-se que a soma do lucro da empresa com o *payoff* dos clientes seja reduzida. Apesar do bem estar total ser reduzido, a empresa consegue, através dessa estratégia, capturar mais do bem estar econômico para si, aumentando seu lucro em relação ao caso anterior.

O lucro médio é de R\$ 19.667,78 (superior ao lucro da estratégia 1), que corresponde a 44,3% do lucro da estratégia 0. O *payoff* total médio é de R\$ 12.792,39 (inferior ao *payoff* da estratégia 1), e a soma do lucro com o *payoff* tem média de R\$ 32.460,17 (também inferior a estratégia 1).

4.1.5 Estratégia 3

A estratégia 3 consiste na total exclusão dos clientes do tipo C, e da passagem do tipo 2. Será ofertada somente a passagem do tipo 1, por um preço mais alto do que os casos anteriores, mas cuja compra seja viável pelos clientes do tipo A e B. Dessa forma, existirão menos compras de passagens, mas cada compra trará mais lucro unitário.

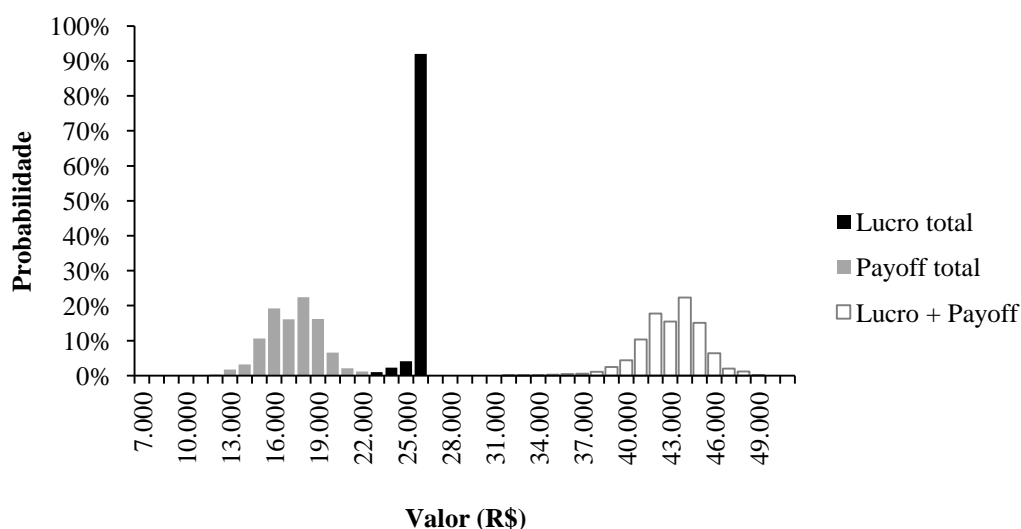
Essa estratégia é bastante semelhante a de número 1, só que com uma passagem com preço mais alto, eliminando assim a demanda dos clientes do tipo C. Nesse caso, não há diferenciação de preço. A única passagem (a do tipo 1) é oferecida para todos os clientes pelo mesmo preço (R\$ 380,00). O lucro unitário por passagem será de R\$ 260,00.

O possível problema, neste caso, é a quantidade relativamente reduzida de clientes potenciais. A quantidade média de clientes esperados, que serão do tipo A ou B, é de 110 indivíduos. Porém, em algumas ocasiões, menos de 100 clientes aparecerão para a compra, deixando assentos vazios. Nos casos em que 100 ou mais clientes aparecem, serão vendidas 100 passagens, gerando um lucro de R\$ 26.000,00, superior aos da estratégia 1 e 2. Isso decorre do fato de que exista demanda em excesso, e os preços estavam muito baixos nas estratégias anteriores, e poderiam ser elevados para aumento dos lucros. Porém, como o problema aqui analisado é probabilístico, nem sempre 100 clientes serão atendidos, e o lucro médio será menor que R\$ 26.000,00. É possível que, na média, o lucro seja inferior às demais estratégias.

Porém, o que se observa é que, por causa dos parâmetros definidos nesse modelo, usualmente 100 clientes ou mais aparecem para realizar compras de passagens aéreas. Além disso, uma quantidade maior de clientes com alto *payoff* é atendida (pois eles não perdem assentos para

os clientes do grupo C, que eram a maioria, mas obtinham pouco ou nenhum *payoff*), resultando em um aumento do *payoff* total. O gráfico 14 mostra, para a estratégia 3, a distribuição de probabilidades, o lucro total, o *payoff* total, e a soma de ambos, construído a partir de uma simulação com 2.000 iterações.

Gráfico 14: Distribuição de probabilidades do lucro, *payoff* e a soma de ambos para a estratégia 3



É possível observar que, na maioria das simulações, 100 ou mais clientes aparecem, e o lucro é de R\$ 26.000. Em apenas alguns casos, uma quantidade menor de clientes aparece, resultando em um lucro reduzido. A distribuição se torna assimétrica, com o limite de R\$ 26.000 para a direita. A média do lucro é de R\$ 25.787,17, equivalente a 58,0% do lucro da estratégia 0.

A média do *payoff* total foi de R\$ 16.766,12, e a média da soma do lucro com o *payoff* foi de R\$ 42.553,29. Conforme já mencionado, o *payoff* foi relativamente alto principalmente porque houve priorização do atendimento a clientes que possuem maior *payoff* (clientes A e B), em detrimento daqueles que não obteriam *payoff* nenhum (cliente C). Como os 100 assentos disponíveis foram ocupados por clientes que obtiveram maior *payoff*, o *payoff* total foi maior.

4.1.6 Estratégia 4

Essa estratégia consiste na diferenciação de preços, através dos dois tipos de passagens aéreas, entre os clientes A e B. Será oferecida uma passagem mais cara com objetivo de se alcançar os clientes A, e uma mais barata com objetivo de se alcançar os clientes B.

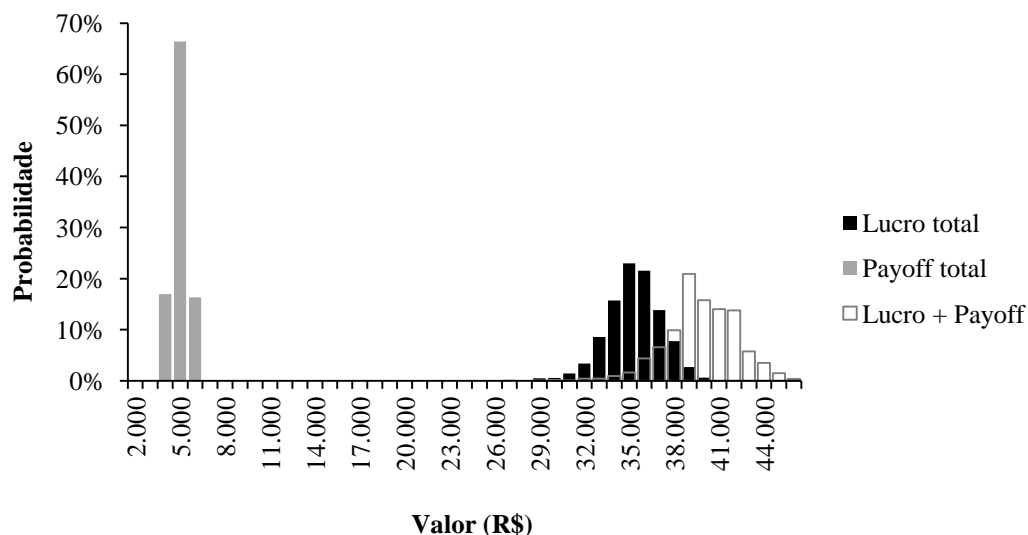
O preço da passagem 2 é exatamente igual a quantia que o cliente B está disposto a pagar por ela: R\$ 300,00. Como o cliente A está disposto a pagar R\$ 400 por essa passagem, ele teria um *payoff* de R\$ 100,00. A passagem 1 deve ser oferecida para o cliente A com um *payoff* igual ou superior a esse. Isso significa que o preço da passagem deve ser R\$ 650,00 ou menos. O preço então é estabelecido no máximo possível, de R\$ 650,00.

Assim, o cliente B não obtém *payoff* algum com essa estratégia de preços da companhia aérea, e o cliente A obtém algum *payoff*, mas que é menor que o obtido com as estratégias 1 a 3. O lucro unitário por passagem 1 é de R\$ 530,00 (passagem a qual será interessante somente para clientes A), e de R\$ 200,00 com a passagem 2 (interessante para clientes B).

Foram executadas 2.000 simulações, nas quais existiram 100 vendas na maioria das vezes, mas não em todas. Apesar de algumas iterações resultarem em assentos vazios, ainda assim o lucro foi relativamente alto: em média, R\$ 34.794,57.

As distribuições de probabilidade podem ser vistas no gráfico 15.

Gráfico 15: Distribuição de probabilidades do lucro, *payoff* e a soma de ambos para a estratégia 4



O lucro total médio da estratégia 4 corresponde a 78,3% daquele obtido com a estratégia 0. Observe que o *payoff* total, com média de R\$ 4.530,64, é bastante reduzido em relação às estratégias 1 a 3. A soma do lucro total com o *payoff* total resulta em média no valor de R\$ 39.325,21, inferior aquele da estratégia 3. Ou seja, o bem estar econômico é reduzido, mas a empresa captura grande parte desse bem estar para si, resultando em um lucro superior aos das estratégias 1 a 3.

4.1.7 Resultados do Modelo 1

O gráfico 16 resume o comportamento das 4 estratégias propostas nesse cenário, além da estratégia referencial (a de número zero). Elas estão ordenadas em ordem crescente de lucro total.

Gráfico 16: Resultados das estratégias propostas.

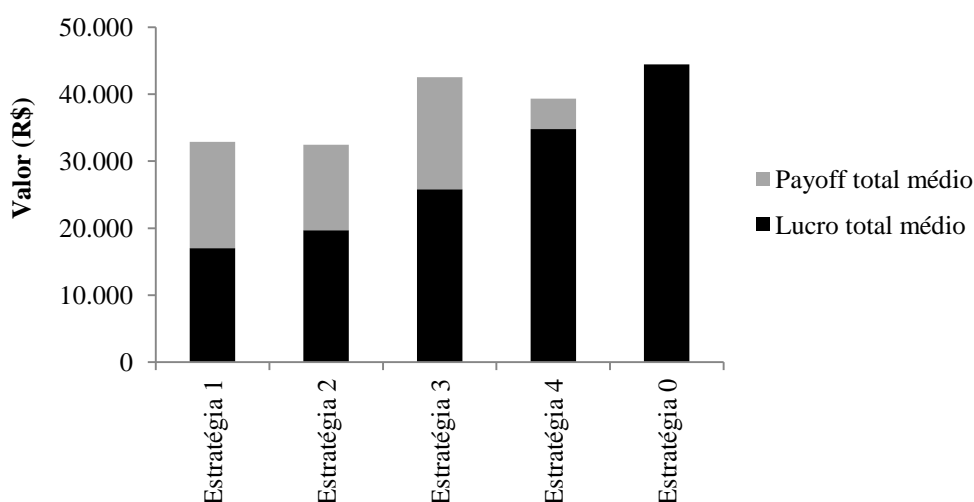


Tabela 3: Quadro resumo dos resultados com as diferentes estratégias para o modelo 1

	Estratégia 1	Estratégia 2	Estratégia 3	Estratégia 4	Estratégia 0
Lucro total médio	17.000,00	19.667,78	25.787,17	34.794,57	44.423,42
Payoff total médio	15.900,45	12.792,39	16.766,12	4.530,64	0
Lucro + Payoff	32.900,45	32.460,17	42.553,29	39.325,21	44.423,42
Lucro em relação a Estratégia 0	38,3%	44,3%	58,0%	78,3%	

A estratégia 0 é a que oferece diferenciação de primeiro grau, e possui caráter teórico, pois não é possível executá-la na prática para o problema proposto, sendo um limite superior para o lucro. A estratégia 1 é a que propõe uma única passagem com preço baixo, atendendo todos os clientes (A, B e C). A estratégia 2 oferece duas passagens com preços diferentes, diferenciando clientes do tipo C dos demais. A estratégia 3 contempla uma única passagem com preço fixo (sem diferenciação) e mais elevado, de tal forma a atender somente clientes A e B, excluindo clientes C. A estratégia 4 apresenta diferenciação de preços entre clientes A e B, e não atende clientes C.

Pode-se notar que o aumento do lucro da empresa não necessariamente resulta em um aumento do bem estar econômico. A estratégia 0 (de maior lucro) é a que proporciona maior bem estar econômico. Isso se deve principalmente ao fato de que os 100 clientes que dão maior valor para as passagens são atendidos. Porém, todo o valor é transferido para a empresa. Nos demais casos, nem sempre 100 clientes são atendidos, e nem sempre são atendidos aqueles que dão maior valor para as passagens.

A estratégia 1 reduz o bem estar econômico principalmente por não atender necessariamente os 100 clientes de maior disposição a pagar. Isso decorre do fato da companhia aérea oferecer as passagens para os clientes na ordem que eles aparecem. Se 100 clientes do tipo C aparecerem antes de qualquer A e B, serão vendidas 100 passagens para eles, gerando reduzida utilidade para o cliente, e menor bem estar econômico total. A estratégia 2 apresenta bem estar econômico ligeiramente inferior ao da estratégia 1 porque são vendidas passagens com utilidade reduzida para o cliente C. A estratégia 3 alcança maior bem estar econômico do que a 2, principalmente porque os clientes de maior utilidade são atendidos preferencialmente (já que os clientes C, de menor *payoff*, são excluídos). Porém, não há prioridade entre os dois grupos atendidos, e alguns clientes de maior utilidade (A) não são atendidos, fazendo com que o bem estar não seja o maior possível. A estratégia 4 também não atende todos os clientes de maior utilidade (A), e, além disso, oferece passagens de utilidade menor para o cliente B.

Pode-se notar que a estratégia 2 corresponde a estratégia 1, mas com adaptações para possibilitar a discriminação de preços. O mesmo ocorre entre a estratégia 4 (que possui diferenciação de preços) e 3 (sem diferenciação). A diferenciação de preços, nos dois casos possibilitou aumento de lucro para a empresa.

Observe também que a estratégia 3 resultou em aumento de lucro para a empresa em relação a estratégia 1. A única mudança que ocorreu foi o patamar do preço. Nenhuma dessas duas estratégias estava relacionada com a diferenciação de preços. Observe, inclusive, que a estratégia 3 permite maior lucro do que a estratégia 2, sendo que esta última possui diferenciação. Ou seja, a diferenciação por si só não garante aumento do lucro, mas, se definida de maneira adequada em função das características do mercado, ele poderá resultar sim em um aumento nos lucros.

Se a companhia aérea deseja maximizar o lucro médio, a melhor estratégia para o modelo 1 é aquela que permite diferenciação entre clientes A e B, e que não atende clientes do grupo C.

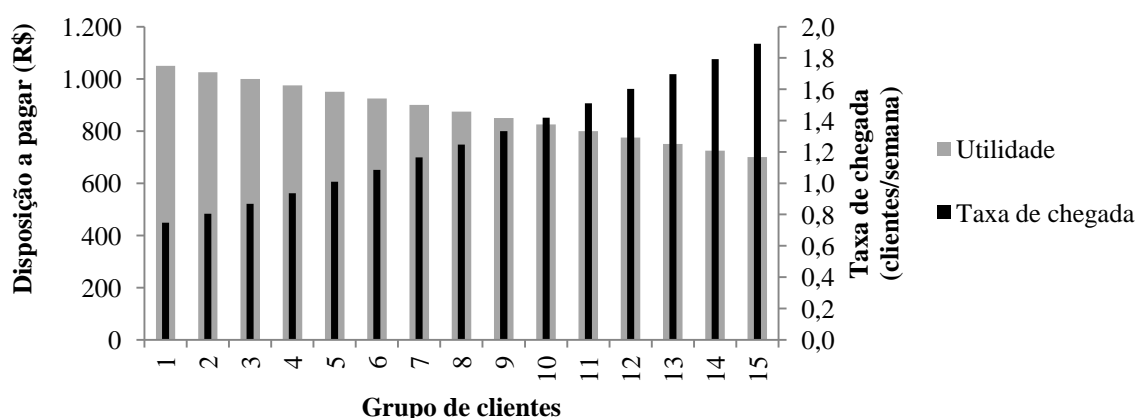
Do ponto de vista do bem estar econômico (no qual busca-se maximizar a soma do *payoff* do cliente com o lucro da empresa), a estratégia 3, sem diferenciação de preços, seria o ideal.

4.2 Modelo 2

Esse modelo será construído para análise da diferenciação de preços ao longo do tempo, e não entre clientes. Será ofertado um único tipo de passagem, com preço variável ao longo do tempo. A passagem será vendida durante 12 semanas, e existem 100 assentos a venda.

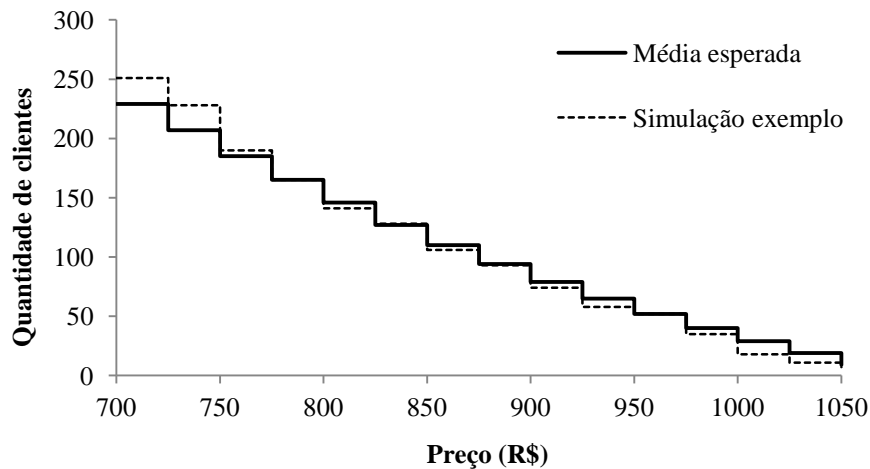
Nesse modelo, são contemplados 15 tipos de clientes. O grupo de clientes número 1 é aquele que está disposto a pagar mais pela passagem, e que aparece com menor frequência. O grupo de clientes de número 15 é aquele que está disposto a pagar o menor preço, mas que aparece com maior frequência. Os outros 13 grupos são intermediários. A taxa de chegada e a utilidade de todos os grupos são constantes ao longo do tempo. O gráfico 17 mostra as características de cada grupo.

Gráfico 17: Taxas de chegada e utilidades (constantes no tempo) dos 15 grupos de clientes



Com a taxa esperada de clientes por semana, é possível saber a média esperada de clientes de cada grupo que aparecerão durante as 12 semanas de vendas de passagem. O gráfico 18 mostra, para cada preço, a quantidade esperada de clientes que estarão dispostos a pagar aquele preço ou mais pela passagem durante as 12 semanas consideradas. Essa, na realidade, é a curva de demanda. Como o modelo é probabilístico, nem sempre a curva de demanda terá exatamente esse formato, com esses exatos valores, já que a quantidade de aparecimento de clientes de cada grupo é uma variável aleatória. No gráfico, também é mostrada a curva de demanda resultante de uma simulação ilustrativa.

Gráfico 18: Quantidade de clientes que estão dispostos a pagar um determinado preço ou menos para a única passagem (curva de demanda)



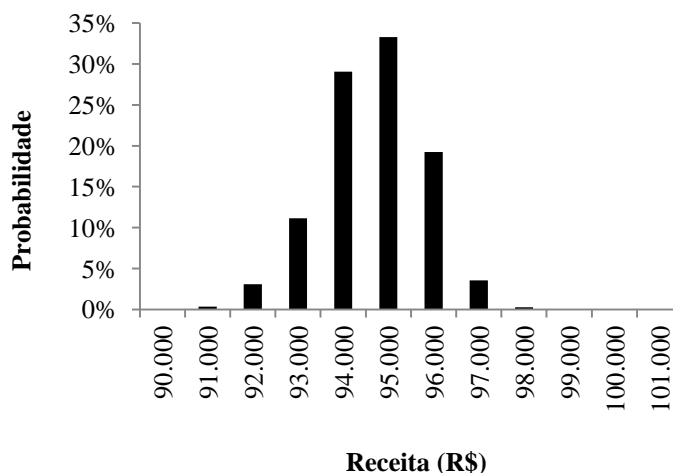
A companhia aérea definirá inicialmente um preço, em função das taxas de chegada e utilidades conhecidas. A medida que o tempo passa, a empresa decidirá se deve ou não modificar o preço. Algumas estratégias para definição dos preços ao longo do tempo são estudadas a seguir.

Como só existe uma passagem sendo vendida nesse modelo, será estudada a alternativa que gera maior receita, pois será a que gera maior lucro também, conforme já explicado. O lucro seria apenas uma transformação linear da receita, do tipo $lucro = \beta_0 \text{receita} + \beta_1$, na qual a constante β_0 depende do preço unitário definido para a passagem, e β_1 do custo fixo.

4.2.1 Estratégia 0

Essa é a estratégia, que, na prática, não tem aplicação viável, mas é uma importante referência de receita máxima. Consiste na diferenciação de primeiro grau, na qual é oferecido um preço diferente para cada cliente, no valor exato do que ele está disposto a pagar, e são primeiro atendidos todos os clientes que dão maior receita (que são os que possuem maior utilidade). Além disso, assume-se que a companhia aérea saberá qual vai ser a demanda futura.

O resultado de 2.000 simulações é mostrado no gráfico 19. Conforme já mencionado, o *payoff* para o cliente, nesse tipo de estratégia, é sempre zero (já que o preço é sempre igual a utilidade), e a receita é igual ao bem estar econômico. A receita total média é de R\$ 94.614,66.

Gráfico 19: Distribuição da receita para a estratégia 0

4.2.2 Estratégia 1

Com essa estratégia não será realizada diferenciação de preços ao longo do tempo. Será definido um preço constante para a única passagem. Qual deve ser esse preço constante? É de se esperar que com um preço muito alto, poucos clientes sejam atendidos, e nem todos os assentos da aeronave serão ocupados. Cada compra vai gerar uma receita unitária elevada, mas serão poucos clientes, e a receita total provavelmente será baixa. No outro extremo, ao se ofertar um preço muito baixo, muitos clientes estarão dispostos a comprar a passagem. Provavelmente serão mais clientes do que os assentos disponíveis (100). Cada venda vai gerar uma receita baixa, mas provavelmente serão vendidos os 100 assentos. Nesse caso, a receita poderia ser aumentada com um aumento de preço, pois, mesmo com o preço mais alto, ainda assim existira demanda o suficiente para completar as 100 vendas.

Portanto, o preço que maximiza a receita provavelmente está em uma posição intermediária entre o preço mínimo que um cliente está disposto a pagar (R\$ 700,00, no caso do cliente 15) e o máximo (R\$ 1050,00, no caso do cliente 1).

Para realizar o cálculo do preço ótimo, foi possível fazer uso de métodos analíticos para obtenção das distribuições de probabilidade, e da receita média esperada. Não foi necessário fazer uso da técnica de Monte Carlo, e a receita média em função do preço estabelecido é mostrada no gráfico 20. Observe que o preço que maximiza a receita é R\$ 850,00.

Para a obtenção do *payoff* total dos clientes, o problema se tornou muito mais complexo, demandando alto custo computacional para resolução das equações analíticas. Por isso, optou-se por realizar 2.000 simulações e observar os resultados. O 21 mostra a distribuição do *payoff*

total com essas simulações para o preço que gera maior receita (R\$ 850,00), bem como a distribuição da receita e do bem estar total.

Gráfico 20: Receita média esperada em função do preço estabelecido

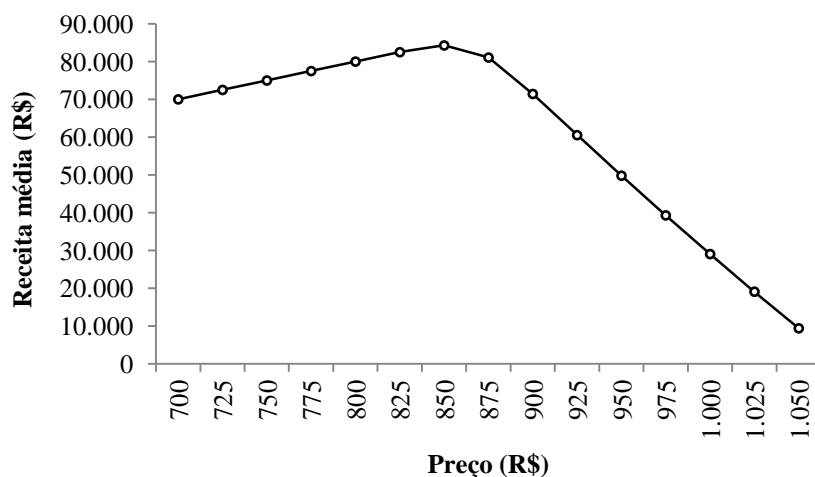
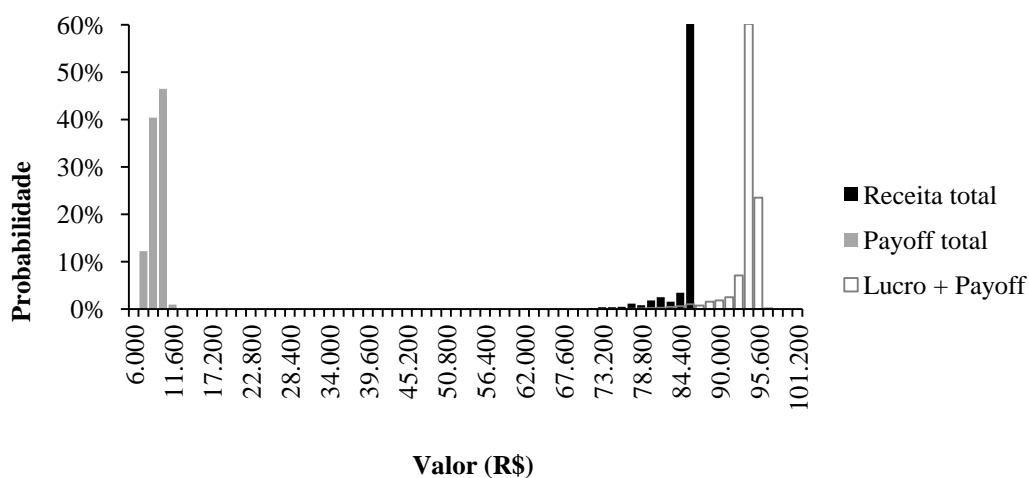


Gráfico 21: Distribuição de probabilidades da receita, do *payoff* total e do bem estar econômico para passagem com preço constante de R\$ 850,00



A receita total média esperada é de R\$ 84,273,00, correspondendo a 89,1% da receita obtida com a estratégia 0, e possui distribuição assimétrica, com limite superior de R\$ 85,000,00. O *payoff* total médio esperado é de R\$ 8.761,89, e a soma da receita com o *payoff* esperada é de R\$ 93.034,89.

4.2.3 Estratégia 2

Essa estratégia consiste em definir um preço fixo para passagem nas 10 primeiras semanas, e modificar o preço, caso necessário, na semana 10. Isto é, existirá um preço constante entre os

instantes $t = 0$ e $t = 10$, e outro preço constante, definido em $t = 10$, para os instantes entre 10 a 12.

Optou-se por uma estratégia na qual é possível mudar o preço somente no final do período de vendas. Isso é decorrência das discussões presentes no capítulo 2.1.1. Por simplificação, optou-se por utilizar uma estratégia que permita mudança do preços apenas em um único dado instante ($t = 10$). Podem existir estratégias de definição de preços ao longo do tempo que são mais interessantes do ponto de vista do lucro, mas a busca entre todas as alternativas existentes é inviável.

Com a opção proposta, é necessário escolher o melhor preço a ser fixado no início, e qual será o critério de decisão para definição do preço para as últimas semanas.

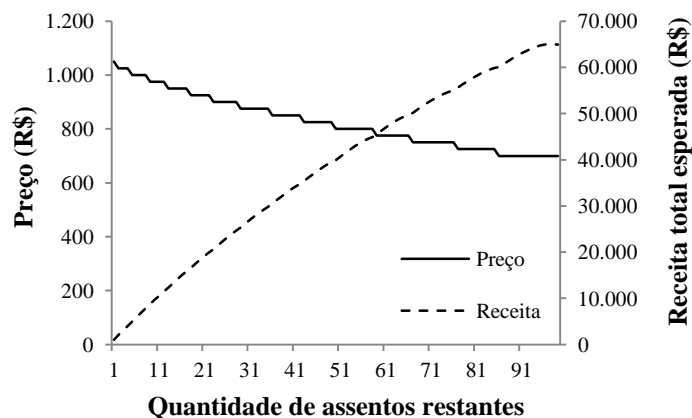
O primeiro passo foi verificar qual é o melhor preço a ser definido nas 2 últimas semanas, em função da quantidade de assentos vazios. Se existem ainda muitos assentos a serem preenchidos, um preço baixo deve ser oferecido, para que muitos clientes sejam atraídos, gerando receita na compra de todos os assentos restantes. Se existirem poucos assentos restantes, existirá demanda em excesso, e a melhor estratégia seria elevar o preço, buscando maior receita com as vendas dos poucos assentos restantes.

Através de método analítico, foram obtidas as receitas médias, em função da quantidade de assentos restantes, para cada patamar de preço. A tabela 4 mostra a melhor estratégia de definição de preço em função da quantidade de assentos restantes nas últimas duas semanas. O gráfico 22 a ilustra, mostrando também qual seria a receita total esperada nas duas últimas semanas para o preço ótimo estabelecido. Se, por exemplo, existirem 5 assentos restantes, deve-se ofertar um preço de R\$ 1.000 nas duas últimas semanas, que vai gerar uma receita média esperada de R\$ 4.994,00.

Tabela 4: Estratégia de definição de preços

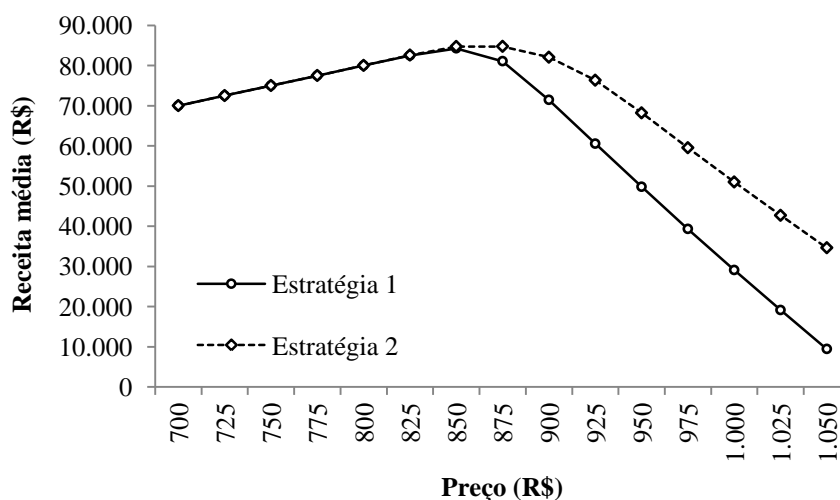
Quantidade de assentos restantes	Preço ótimo
1	R\$ 1.050
2 a 4	R\$ 1.025
4 a 8	R\$ 1.000
9 a 12	R\$ 975
13 a 17	R\$ 950
18 a 22	R\$ 925
23 a 28	R\$ 900
29 a 35	R\$ 875
36 a 42	R\$ 850
43 a 49	R\$ 825
50 a 58	R\$ 800
59 a 66	R\$ 775
67 a 76	R\$ 750
77 a 85	R\$ 725
86 a 100	R\$ 700

Gráfico 22: Estratégia de definição de preços e receita esperada



O segundo passo foi escolher o preço a ser fixado nas 10 primeiras semanas. O gráfico 23 mostra a receita esperada para cada patamar de preço inicialmente definido (assumindo-se que o preço nas últimas duas semanas é definido de acordo com os assentos restantes), e a compara com a receita obtida com a estratégia 1, na qual o preço definido se mantinha constante, inclusive nas 2 últimas semanas.

Gráfico 23: Receitas esperadas em função do preço inicial escolhido para as estratégias 1 e 2

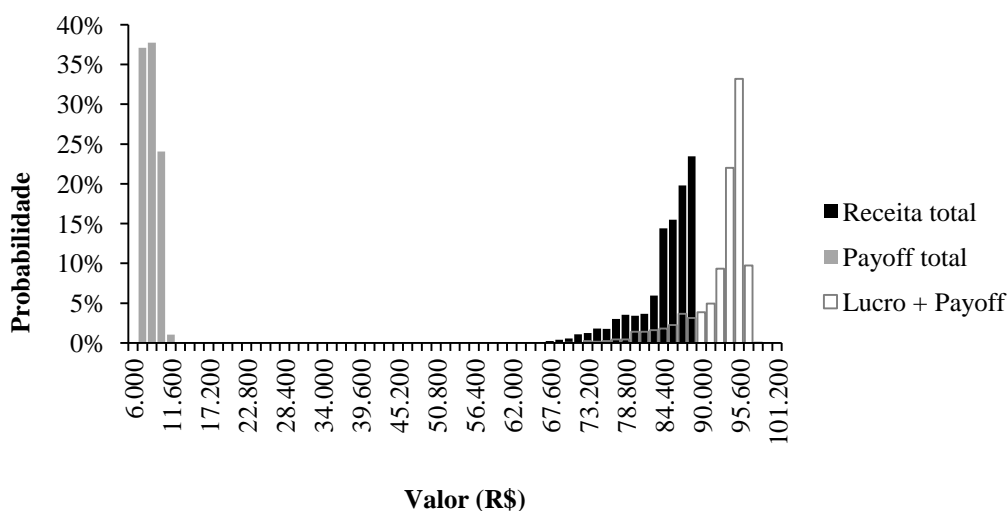


Observe que, no caso da estratégia 1, o preço inicial escolhido é aquele que será ofertado permanentemente, durante todas as 12 semanas. No caso da estratégia 2, esse preço é o que será mantido nas 10 primeiras semanas, mas poderá ou não ser modificado nas 2 últimas semanas, em função da quantidade de assentos ainda disponíveis.

Observe também que a estratégia 2 é sempre superior (ou igual) a estratégia 1, para qualquer um dos preços escolhidos, em termos de receita. Além disso, a melhor opção de preço inicial é de R\$ 875, maior do que aquele escolhido na estratégia 1 (de R\$ 850). Isso se deve ao fato da estratégia 2 possibilitar a obtenção dos clientes que estão dispostos a pagar mais nas 10 primeiras semanas, e executar, em função dos acontecimentos nas 10 primeiras semanas, a estratégia mais adequada para os meses seguintes, elevando o preço caso existam poucas poltronas sobrando para serem vendidas, ou reduzindo o preço quando existirem muitos assentos restantes.

O cálculo da distribuição do *payoff* total é complexo, e, por isso, optou-se por utilizar o método de Monte Carlo, com 2.000 simulações. O resultado é mostrado no gráfico 24.

Gráfico 24: Distribuições de probabilidades da receita total, do *payoff* total, e da soma de ambos, obtidas através de simulação



A receita média esperada é de R\$ 84.747,00, que corresponde a 89,6% do obtido com a estratégia 0. O *payoff* total médio é de R\$ 8.303,89 e a soma do *payoff* com a receita é de R\$ 93.050,89.

Buscou-se também uma estratégia alternativa, na qual o novo patamar de preços seria definido no instante $t = 9$ ou antes. Essa estratégia gerou uma melhoria na receita muito reduzida, o que está de acordo com o proposto por McAfee e te Velde (2007), que dizem que a

diferenciação de preços ao longo do tempo não é tão impactante quando existe um numero muito grande de assentos sendo ofertados, que é o que ocorre normalmente no instante $t = 9$ para o cenário proposto.

4.2.4 Resultados do Modelo 2

A tabela 5 mostra a comparação entre as estratégias 1 e 2 e a referencial (estratégia 0). A estratégia 1 é aquela que não apresenta diferenciação de preços ao longo do tempo, e a estratégia 2 apresenta uma possível modificação do preço na última semana das vendas da passagem aérea.

Tabela 5: Quadro resumo dos resultados com as diferentes estratégias para o modelo 2

	Estratégia 1	Estratégia 2	Estratégia 0
Receita total média	84.273,00	84.747,00	94.614,66
Payoff total médio	8.761,89	8.303,89	0
Receita + Payoff	93.034,89	93.050,89	94.614,66
Receita em relação a Estratégia 0	89,1%	89,6%	

Observa-se que a diferenciação de preços ao longo do tempo elevou as receitas, e manteve o bem estar econômico constante. Podem existir estruturas de diferenciação ao longo do tempo mais complexas que a proposta, resultado em aumento mais significativo da receita com as vendas.

Além disso, a diferenciação de preços ao final do período permite maior robustez quanto a obtenção de receitas, no sentido de que é possível adaptar o preço ao comportamento observado do aparecimento de clientes, permitindo que mesmo um preço definido, a princípio, longe do ótimo, podem existir modificações para alcançar receita total próxima do ponto ótimo.

Foi também constatado que os ganhos com a discriminação de preços ao longo do tempo têm uma magnitude de segunda ordem quando comparada a discriminação entre clientes, presente no modelo 1.

5 CONCLUSÕES

Através do modelo proposto, foi possível concluir que a diferenciação de preços tem potencial para elevar de forma significativa o lucro da companhia aérea, mas o resultado é mais expressivo para a diferenciação entre os diversos consumidores em um mesmo instante de tempo do que a diferenciação de preços ao longo do tempo, condizente com os estudos de Stavins (2001), que mostram que empresas aéreas diferenciam mais clientes que viajam a trabalho ou a turismo do que os clientes que compram as passagens com antecedência ou não.

Conforme proposto por Carroll e Coates (1999), Dana (1998) e McAfee e te Velde (2007), o modelo mostra que a discriminação de preços pode reduzir o bem estar econômico em relação a situações em que não existe diferenciação, apesar de aumentar o lucro da empresa. Isto é, apesar do valor econômico total diminuir, a empresa se apropria de uma maior parte dele. Além disso, a diferenciação de primeiro grau, com informações da demanda e da disposição a pagar de cada cliente, gera maior bem estar econômico, mas todo o benefício vai para a empresa, que está de acordo com Carroll e Coates (1999).

A diferenciação de preços ao longo do tempo possibilita o aumento do lucro da empresa mesmo quando a disposição a pagar dos clientes é constante ao longo do tempo, o que é condizente com o proposto por McAfee e te Velde (2007). Ou seja, a variação dos preços, nesse caso, não necessariamente está diferenciando tipos de clientes diferentes, com diferentes disposições a pagar, mas está servindo de minimizador de incertezas quanto à demanda futura.

Além disso, o modelo se mostrou uma ferramenta útil para análise dos diversos tipos de discriminação, permitindo que uma parametrização seja realizada para possível exploração de estratégias de preço conforme as características dos consumidores, o que é consoante com a filosofia de modelagem baseada em agentes.

A modelagem permite que uma extensão seja realizada para inclusão de mais tipos de clientes e passagens, e estratégias mais sofisticadas de diferenciação de preços em um determinado instante ou ao longo do tempo. Para evolução do modelo, os próximos passos seriam:

- Adequação para que mais de uma companhia aérea seja considerada, de tal forma que o lucro e o bem estar econômico possam ser analisados também sob o ponto de vista da concorrência entre empresas, para que, entre outros resultados, seja avaliado o impacto que a competitividade causa na diferenciação de preços.

- Inclusão de aprendizado ao longo do tempo, tanto das empresas quanto dos clientes, permitindo que o comportamento dos agentes seja adaptável.
- Modificação da estrutura do modelo para que seja viável a análise das decisões das companhias aéreas levando-se em conta a aversão ao risco.
- Inclusão de variáveis macroeconômicas, que modificariam o comportamento das empresas e de seus clientes.

Além disso, a estrutura construída pode ser adaptada para análise de outros tipos de problemas de discriminação de preços.

6 BIBLIOGRAFIA

ARONSSON, T.; BACKLUND, K.; LÖFGREN, K.-G. Hamiltonian Welfare Measures in an Imperfect Global Economy: Rich vs Poor Regions, 2001.

ARONSSON, T.; LÖFGREN, K.-G. Welfare theory: history and modern results. **Mathematical models in economics**, 1, 2007.

AXTELL, R. L.; ANDREWS, C. J.; SMALL, M. J. Agent-based models of industrial ecosystems, 2003.

BANAL-ESTANOL, A.; MICOLA, A. R. Are Agent-Based Simulations Robust? The Wholesale Electricity Trading Case, 2010.

BANKER, R. D.; JOHNSTON, H. H. An empirical study of cost drivers in the U. S. airline industry. **The accounting review**, 68, n. 3, 1993.

BEKMAN, O. R.; NETO, P. L. O. **Análise estatística da decisão**. [S.l.]: Edgard Blücher, 1980.

BEN-AKIVA, M.; LERMAN, S. **Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand**. [S.l.]: MIT Press, 1985.

BERNOULLI, D. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. **Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, 5, 1738.

BONABEAU, E. Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. **PNAS**, 99, 14 Maio 2002.

BORENSTEIN, S.; ROSE, N. L. Competition and Price Dispersion in the U.S. Airline Industry. **Journal of Political Economy**, 102, 1994.

CALDART, A.; OLIVEIRA, F. The impact of organisational complexity in the strategy development process. In: O'BRIEN **Supporting Strategy: Frameworks, Methods and Models**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

CALDART, A.; RICART, J. A Formal Evaluation of the Performance of Different Corporate Styles in Stable and Turbulent Environments, 2006.

CARLTON, D. W.; PERLOFF, J. M. **Modern industrial organization**. Nova Iorque: Harper Collins, 1994.

CARROLL, K.; COATES, D. Teaching Price Discrimination: Some Clarification. **Southern Economic Journal**, 66, 1999.

CHANG, M.-H.; HARRINGTON JR, J. E. Agent-Based Models of Organizations. **Handbook of Computational Economics II: Agent-Based Computational Economics**, 2005.

DANA, J. D. J. Advance-Purchase Discounts and Price Discrimination in Competitive Markets. **Journal of Political Economy**, 106, 1998.

DEVORE, J. L. **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences**. 8. ed. [S.l.]: Duxbury Press, 2011.

DONALDSON, D.; EATON, B. C. Patience, More Than Its Own Reward: A Note on Price Discrimination. **The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d'Economie**, 14, 1981.

DRUCKENMILLER, D.; ACAR, W.; TROUTT, M. Agent Based Modeling and Simulation of Strategic Scenarios with Repast 2.0, 2004.

DUMAGAN, C. J.; MOUNT, T. D. Measuring the consumer welfare effects of carbon penalties: Theory and applications to household energy demand. **Energy Economics**, 14, 1992.

ESCOBARI, D.; JINDAPON, P. Price Discrimination through Refund Contracts in Airlines, 2008.

HENSHER, D. A.; ROSE, J. M.; GREENE, W. H. **Applied Choice Analysis: A Primer**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

HEPPENSTALL, A. J.; EVANS, A. J.; BIRKIN, M. H. A Hybrid Multi-Agent/Spatial Interaction Model System for Petrol Price Setting, 2006.

HESS, S.; POLAK, J. W. Exploring the potential for cross-nesting structures in airport-choice analysis: A case-study of the Greater London area. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, 2006.

HOROWITZ, J. K.; MCCONNELL, K. Willingness to accept, willingness to pay and the income effect. **Journal of Economic Behavior & Organization**, 51, 2003.

KIMBROUGH, S.; MURPHY, F. Strategic Bidding of Supply Curves: An Agent-Based Approach to Exploring Supply Curve Equilibria, 2008.

KORITAROV, V. S. Real-World Market Representation with Agents. **IEEE Power and Energy Magazine**, 2004, p. 39-46.

MCAFEE, R. P.; TE VELDE, V. Dynamic Pricing in the Airline Industry. **Handbook on Economics and Information Systems**, v. 1, 2007.

MCAFEE; PRESTON, R. **Issues in Competition Law and Policy**. [S.l.]: [s.n.], 2008.

PAGE, S. E. Agent Based Models. **Oxford Handbook of Political Science Methodology**, 2005.

PIGOU; CECIL, A. **The Economics of Welfare**. Londres: Macmillan and Co, Limited, 1932.

SAMUELSON, D. A.; MACAL, C. M. Agent-Based Modeling Comes of Age. **OR/MS Today**, 2006.

SHELLING, T. *Micromotives and Macrobehavior*, N. Y., 1978.

SLESNICK, D. T. Empirical Approaches to the Measurement of Welfare. **Journal of Economic Literature**, XXXVI.

SOMANI, A.; TESFATSION, L. An Agent-Based Test Bed Study of Wholesale Power Market Performance Measures. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, v. 3, n. 4, p. 56-72, Novembro 2008.

STAVINS, J. Price Discrimination in the Airline Market: The Effect of Market Concentration. **The Review of Economics and Statistics**, 83, n. 1, 2001.

STOLE, L. A. Price Discrimination and Imperfect Competition, 2003.

TESFATSION, L. Auction Basics for Wholesale Power Markets: Objectives and Pricing Rules, 2009.

TESFATSION, L. Agent-Based Modeling of Electric Power Markets, 2010.

VARIAN, H. R. **Microeconomia**: Princípios Básicos. 3a. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2003.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. [S.l.]: Princeton University Press, 1944.